Yuri Martins Fontes Leichsenring

Acerca da Simulação Computacional de Processos de Conformação Mecânica de Metais

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre

São Paulo
2001

Yuri Martins Fontes Leichsenring

Acerca da Simulação Computacional de Processos de Conformação Mecânica de Metais

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de mestre.

Orientador: professor Ruy M. O. Pauletti

Versão Corrigida

São Paulo

2001

FICHA CATALOGRÁFICA

Leichsenring, Yuri Martins Fontes
Acerca da simulação computacional de processos de conformação mecânica de metais. São Paulo, 2001.
p.145

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1. Método dos elementos finitos 2 Mecânica dos sólidos deformáveis 3.Conformação mecânica de metais 4.Métodos de integração numérica no tempo I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II. t

Nota: A versão original desta dissertação se encontra disponível na Biblioteca Central da EPUSP e na Biblioteca de Engenharia Civil e Produção da EPUSP; esta versão corrigida, publicada na rede, tem 157 páginas (além dos Anexos).

Yuri Martins Fontes Leichsenring

Acerca da Simulação Computacional de Processos de Conformação Mecânica de Metais

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de mestre.

DATA DA APROVAÇÃO: 05 de abril de 2001.

BANCA EXAMINADORA

Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti [orientador]

(EPUSP/ Depto. de Engenharia de Estruturas e Fundações)

Paulo de Mattos Pimenta

(EPUSP/ Depto. de Engenharia de Estruturas e Fundações)

Marcelo Massarani

(EPUSP/ Depto. de Engenharia Mecânica)

Dedico esta tese à minha mãe Anita
e ao meu pai Ivan, que me ensinaram o
caminho da crítica e do amor;
e a Karl Marx, que demonstrou
que este caminho não pode ter um fim.

Dedico-a também à jovem Araci,
que me fez provar do amor delicado
e da vida mais leve, e que talvez
nem saiba que me perdeu na poesia,
eu que já era excomungado
amante da liberdade.

"*Os filósofos limitaram-se, até*
agora, a interpretar o mundo.
Cabe transfomá-lo"
(K. M.)

Agradecimentos

Primeiramente quero sinceramente agradecer a mim mesmo, pela paciência e humor tão necessários a um trabalho como este.

Em seguida devo meus votos à Elaine, à Marly, ao Aparecido, à Léo, à Guiomar, ao Óscar, ao Sobral, ao Irani, ao Krishna, ao Tai Kang, ao Campello, ao Telmo, ao César do IPT, ao Alfonsinho, ao Ruy, ao Reyolando e a todos aqueles que me deram uma força neste espinhoso trabalho.

Sou grato também aos camaradas da Associação de Educadores da USP por me terem acompanhado em obras tão valiosas, nestes últimos anos, que espero ainda sejam muitas.

Agradeço a todos aqueles amigos e amigas, companheiros que participaram de minha vida nestes longos dez anos uspianos, entre eles: Rejane, Maísa, Jardel, Pontch, Renato, Cidão, Moniquinha, Ivan, Igor, Brou, Pérola, Negão, Endyra, César, Fabião, Alê, Adriana, Dan, Janaína, Pépe, Tatiana, Cláudia, Mari, Elis e Araci.

Por fim, a todos os operários do mundo dedico estes reflexivos versos de um materialista histórico e dialético poeta brasileiro:

"[*'E o Diabo, levando-o a um alto monte, mostrou-lhe num momento de tempo todos os reinos do mundo. E disse-lhe o Diabo: – Dar-te-ei todo este poder e a sua glória, porque a mim me foi entregue e dou a quem quero' (Lucas)*]

Sentindo que a violência / Não dobraria o operário / Um dia tentou o patrão / Dobrá-lo de modo vário. / De sorte que o foi levando / Ao alto da construção / E num momento de tempo / Mostrou-lhe toda a região / E apontando-a ao operário / Fez-lhe esta declaração: / – Dar-te-ei todo esse poder / E a sua satisfação / Porque a mim me foi entregue / E dou-o a quem quiser / Dou-te tempo de lazer / Dou-te tempo de mulher. / Portanto, tudo o que vês / Será teu se me adorares / E, ainda mais, se abandonares / O que te faz dizer não. / Disse e fitou o operário / Que olhava e que refletia / Mas o que via o operário / O patrão nunca veria. / O operário via casas / E dentro das estruturas / Via coisas, objetos / Produtos, manufaturas. / Via tudo o que fazia / O lucro do seu patrão / E em cada coisa que via / Misteriosamente havia / A marca da sua mão. / E o operário disse: Não! // – Loucura! – gritou o patrão / Não vês o que te dou eu? / – Mentira! – Disse o operário / Não podes dar-me o que é meu. // E um grande silêncio fez-se/ Dentro do seu coração / Um silêncio de martírios / Um silêncio de prisão / Um silêncio povoado / De pedidos de perdão / Um silêncio apavorado / Como o medo em solidão / Um silêncio de torturas / E gritos de maldição / Um silêncio de fraturas / A se arrastarem no chão. / E o operário ouviu a voz / De todos os seus irmãos / Os seus irmãos que morreram / Por outros que viverão. / Uma esperança sincera / Cresceu no seu coração / E dentro da tarde mansa / Agigantou-se a razão / De um homem pobre e esquecido / Razão porém que fizera / Em operário construído / O operário em construção". *(Vinícius de Moraes)*

Resumo

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de fornecer, de modo didático, uma visão de conjunto da teoria que sustenta a prática da simulação computacional dos fenômenos físicos de conformação mecânica de metais. Neste sentido, o estudo é iniciado com uma explanação a respeito da tecnologia metalúrgica. Em seguida são apresentados os fundamentos da mecânica dos sólidos, como parte da mecânica do meio contínuo, cuja teoria é formulada através de equações diferenciais que, por sua vez, são discretizadas pelo método dos elementos finitos. Este método numérico, que está implementado em muitos programas de simulação por computador, sob códigos de integração numérica explícitos e implícitos, é então formulado e exposto. Por fim, apresenta-se uma introdução a respeito da tecnologia em simulação computacional de estruturas, bem como alguns exemplos de sua aplicação.

Abstract

This work was motivated by the purpose of giving a didactical and global review of the theory which supports the practice of computational simulation of physical phenomena of conformation mechanics. In this way, the research was initiated with an explanation about metallurgic technology. Then, the fundamentals of solid mechanics were presented, as a particular field of continuum mechanics, which are formulated by differential equations. The system is then discretized by the finite element method. This numerical method is implemented in many simulation programs by computer, using explicit or implicit numerical integration codes, also studied here. At the end, an introduction about the technology in computational simulation of structures is presented as well as some examples of its application.

Resumen

Este trabajo fue concebido con el objetivo de proporcionar una visión didáctica de la teoría que sustenta la práctica de la simulación computacional de los fenómenos físicos de la conformación mecánica de metales. En este sentido, el estudio comienza con una explicación de la tecnología metalúrgica. A continuación, se presentan los fundamentos de la mecánica de sólidos, en el marco de la mecánica del medio continuo, cuya teoría se formula mediante ecuaciones diferenciales que, a su vez, se discretizan a través del método de los elementos finitos. A continuación, se formula y explica este método numérico, que se aplica en numerosos programas informáticos de simulación mediante códigos de integración numérica explícitos e implícitos. Por último, se presenta una introducción a la tecnología de simulación computacional de estructuras, así como algunos ejemplos de su aplicación.

Índice

Capítulo 1: Introdução **1**

1.1 Sobre a Base Teórica 2

1.2 Modelagem Computacional de Estruturas 4

1.3 Processos de Conformação Mecânica 5

Capítulo 2: Da Conformação Mecânica de Metais **7**

2.1 Introdução à Tecnologia da Conformação Mecânica de Metais 7

2.2 O Processo de Estampagem Profunda de Metais 14

2.3 Acerca dos Métodos e das Propriedades Metalúrgicas 32

Capítulo 3: Da Mecânica dos Sólidos Deformáveis **46**

3.1 Considerações Gerais 46

3.2 Ponto Material e Massa Específica 48

3.3 Estudo das Deformações 49

3.4 O Conceito de Tensão 56

3.5 Leis Fundamentais da Mecânica do Meio Contínuo 60

3.6 Relações Constitutivas 68

Capítulo 4: Acerca dos Métodos de Discretização do Contínuo **78**

4.1 Discretização Espacial: O Método dos Elementos Finitos 79

4.2 Discretização no Tempo: Métodos de Integração Numérica 104

Capítulo 5: Simulação Computacional **111**

5.1 Modelagens Sob o Código Implícito 115

5.2 Modelagens Sob o Código Explícito 122

Capítulo 6: Conclusão **143**

Bibliografia **146**

Posfácio: Notas Sobre os Caminhos do Conhecimento **150**

Anexos

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de fornecer, de modo didático, uma visão de conjunto da teoria que sustenta a prática da simulação computacional de fenômenos físicos, em particular da conformação mecânica. Isto foi efetivado, por meio de uma organização e exposição teórica generalizada, bem como mediante a simulação exemplificada de processos de conformação mecânica de metais. Tal compreensão teórica é inerente a uma boa interpretação dos resultados advindos de uma simulação, orientando também a escolha de caminhos para a resolução, dentre as diversas formulações, métodos numéricos e programas computacionais.

Com esse intento, o estudo é iniciado com uma explanação a respeito da tecnologia metalúrgica de conformação mecânica de metais, de forma a apresentar os principais tipos e testes. Em seguida são apresentados os fundamentos da mecânica dos sólidos, como parte da mecânica do meio contínuo, cuja teoria é formulada por meio de equações diferenciais que podem ser discretizadas pelo método dos elementos finitos. Este método numérico, que está implementado em muitos programas de simulação por computador, é então formulado e exposto, para na seqüência apresentar-se uma introdução à tecnologia em simulação computacional de estruturas, bem como alguns exemplos de aplicação da técnica da modelagem à conformação de metais. Foi utilizado, para tanto, o programa computacional ANSYS/DYNA (versões 5.5 e 5.6), o qual possui implementado o método dos elementos finitos com duas opções de processamento, a saber, a análise explícita e a implícita.

Não obstante a proposta desta dissertação seja apresentar com didatismo um estudo que delineie a base científico-teórica necessária à simulação computacional de estruturas sujeitas à não-linearidades, visando particularmente a redução do número de etapas necessárias ao fábrico de utensílios, isto não é tudo quanto se desejou passar neste estudo. Outra importante motivação que levou ao desenvolvimento de trabalho em tal área foi o extremo desenvolvimento das ciências nestes tempos, em particular das simulações como um todo, que vêm possibilitar a minimização de muitas das mazelas que ainda hoje atingem a humanidade, podendo ser aplicada em prol do bem público de diversas formas, desde a saúde, com a ciência físico-médica e a engenharia genética, ao transporte e à urbanização. É claro que para tanto não basta desenvolver técnicas e meios, mas sobretudo pensar éticas e fins.

1.1 Sobre a Base Teórica

O estudo realizado acerca da mecânica dos sólidos propiciou uma base para a formulação generalizada do método dos elementos finitos a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Foi proposta, então, uma formulação geral que envolvesse diversas não-linearidades, a saber, um problema dinâmico, com não-linearidades geométricas e não-linearidades físicas, facilmente observado na natureza. O problema modelado é especificamente o caso da conformação mecânica de metais sujeitos a grandes deformações sob um comportamento reológico elasto-plástico, tal qual o caso do dobramento de barras, bem como o da estampagem profunda de chapas, ambos os problemas apresentados em simulação. O estudo da modelagem tem também a motivação de ser relevante a muitas outras possíveis aplicações em simulação de áreas afins, tais como os testes de resistência de novos modelos aeronáuticos, automobilísticos, entre outros, que são extremamente dispendiosos.

Métodos numéricos já têm uso tradicional na resolução de problemas com grande gama de graus de liberdade, onde a solução manual seria altamente

dispendiosa, senão impraticável. Dentre os métodos numéricos que mais se destacaram nas análises computacionais, até este fim-de-século, podemos citar, além do Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e o Método das Diferenças Finitas. Contudo, aquele ora exposto foi o que mostrou, até então, resultados mais consistentes no tratamento de problemas estruturais com elevado grau de complexidade, tais como: problemas com grande número de graus de liberdade; problemas com relevantes não-linearidades geométricas, como grandes deslocamentos, deformações e rotações; problemas com contato e atrito; problemas com não-linearidades físicas, tais como encruamento, anisotropia e taxa de deformação variável. A aplicação do Método dos Elementos Finitos em simulações de processos de conformação iniciou-se na década de 70, quando foram propostas duas formulações capazes de tratar o problema [KOBAYASHI,1989]. São elas:

i) Formulação de sólido – supõe que as deformações sejam elásticas e plásticas, sendo, portanto, o material considerado elasto-plástico ou, ainda, visco-elasto-plástico, e as tensões, relacionadas à deformação elástica e plástica total;

ii) Formulação de fluido – por hipótese, esta formulação despreza as deformações elásticas, em comparação às deformações plásticas, considerando, pois, o material como sendo rígido-plástico ou rígido-visco-plástico, e as tensões, como relacionadas aos incrementos de deformação plástica.

A formulação do método dos elementos finitos, neste trabalho, dar-se-á, como dito, através do princípio dos trabalhos virtuais, a partir da equação do movimento, que advém da mecânica do meio contínuo. Usar-se-á a notação tensorial, para tanto, visto que permite um grande grau de concisão. O tensor é um ente matemático que engloba os conceitos de escalar, vetor e outros conceitos mais complexos. A tensão foi a primeira grandeza física clássica a ser introduzida que não fosse nem escalar, nem vetorial. Estas grandezas, que hoje existem em grande número, principalmente na Física Moderna, passaram a ser conhecidas como grandezas tensoriais [ZAGOTIS, 1982].

1.2 Modelagem Computacional de Estruturas

Ao ser programado para análises computacionais, o método numérico dos elementos finitos tornou viável a resolução de problemas antes tratados apenas de maneira empírica, gerando respostas satisfatórias em grande parte dos casos. Nos problemas práticos da mecânica, os programas de computação, partindo de dados sobre a geometria, a reologia e o carregamento da estrutura, conseguem resolver sistemas de equações com enorme número de incógnitas. A confiabilidade dessas respostas é verificada ora pelo próprio fato de haver convergência para uma solução na resolução do sistema de equações, ora pela interpretação dessas mesmas respostas, que devem ser fisicamente consistentes, evidenciando possíveis falhas ou erros. O próprio programa dispõe de mecanismos que alertam para possíveis problemas ou apontam erros na lógica dos dados de entrada.

Hoje em dia há diversos programas prontos a serem utilizados em análises tanto de estruturas, como de processos térmicos, de fluidos, entre outras.

O programa ANSYS/DYNA, utilizado neste estudo, é uma combinação do pré-processador e do pós-processador do programa ANSYS com o módulo de resolução explícito do programa DYNA, como opção ao processador implícito próprio do ANSYS. A diferença dos algoritmos de resolução está no modo como a equação do movimento é integrada no tempo, o que também será tratado neste trabalho. Devido a isso, ambos os programas foram combinados em um só, de forma a permitir ao usuário a escolha de um ou outro, conforme o caso que se defrontar – normalmente a opção do ANSYS é usada em casos de problemas estáticos, enquanto o DYNA é preferido nas análises dinâmicas. Porém, apenas alguns elementos do DYNA estão disponíveis nesta versão combinada (modelos 5.5 e 5.6), o que restringe algumas análises.

1.3 Processos de Conformação Mecânica

Há milênios, o homem domina artesanal e empiricamente o processo de conformação de metais. As chapas eram utilizadas, nestes primórdios, desde a produção de armas, molas e utensílios domésticos, até a confecção de objetos de arte, nesta época quase sempre ligados aos motivos religiosos.

No século XIX, os processos de conformação começaram a ser industrializados, todavia, apenas após a segunda grande guerra o desenvolvimento desses processos evoluiu contundentemente. Com a demanda que visava a reconstrução do rico e destruído continente europeu, houve um grande interesse em se pesquisar e desenvolver esses processos de modo otimizado. A estampagem profunda, por exemplo, se desenvolveu com o crescimento da indústria de bens de consumo domésticos duráveis e da indústria automobilística e aeronáutica.

A estampagem é o processo de conformação mecânica de chapas mais utilizado e, portanto, mais pesquisado. Diversos materiais e técnicas foram empiricamente testados durante seu avanço tecnológico. As peças estampadas possuem menor peso e, na maioria das vezes, um menor custo quando comparadas a peças obtidas através de processos outros, tais como o forjamento e a fundição, por exemplo. Por se utilizar de chapas delgadas, a estampagem tem mais facilidade de gerar peças com espessura uniforme.

As chapas finas de aço de baixo carbono foram a matéria-prima eleita universalmente para o processo de estampagem, devido a sua uniformidade de espessura e a sua boa textura final, além dos custos serem relativamente baixos. Apesar do grande desenvolvimento tecnológico ocorrido e da posição de destaque que a estampagem ocupa na indústria moderna, as estamparias continuam utilizando-se, na grande maioria das vezes, de processos empíricos para a obtenção das ferramentas necessárias à estampagem. As estamparias empregam diversas matrizes de material ferroso, cada qual servindo à feição de uma peça particular e a seu determinado punção. Cada um dos conjuntos de matriz e punção, feitos por

tentativa e erro, gera grandes desperdícios de tempo e de material. Embora a mão-de-obra trabalhadora continue subvalorizada, os materiais usados são bastante caros, havendo a questão da brutal concorrência, que tende aos oligopólios. Então iniciou-se o uso de programas de modelagem computacional de estruturas, usando métodos tais como o dos elementos finitos como simuladores do processo de conformação mecânica. Boa parcela dessa concentrada indústria já se utiliza da simulação para otimizar processos de conformação.

Capítulo 2

Da Conformação Mecânica de Metais

Este capítulo tem por objetivo apresentar conceitos essenciais ao estudo do processo de conformação mecânica, especialmente no tocante aos metais. O estudo se inicia com o intuito de absorver a tecnologia já desenvolvida e verificada, culminando com a apreensão das idéias gerais que fundamentam o mecanismo de deformação dos principais materiais utilizados na indústria. Apesar das diferenças microscópicas, metais, polímeros e cerâmicas apresentam semelhanças de comportamento macroscópico. Portanto é possível uma mecânica dos materiais que permita a construção de modelos gerais, havendo apenas diferenças de magnitude entre grandezas ligadas à elasticidade, à plasticidade, à viscosidade, ao endurecimento e à fratura, entre outras. Com o conhecimento e utilização destes conceitos, a modelagem computacional do processo de conformação ganha mais detalhamento, aproximando-se da realidade verificada de modo empírico e permitindo maior confiabilidade aos modelos cuja precisão não possa ser sabida *a priori*.

2.1 Introdução à Tecnologia da Conformação Mecânica de Metais

Os processos de conformação estão presentes em grande parte da indústria moderna. A partir de metais, plásticos e outros materiais, pode-se obter uma grande gama de objetos, desde copos, rodas, fios e tubos a marca-passos, discos e outros

objetos de precisão. Neste trabalho o enfoque principal foi dado à estampagem de chapas metálicas finas, que podem ser trabalhadas de diversas formas. A estampagem é um dos processos de conformação mecânica mais amplamente utilizado.

A conformação mecânica é o processo de conversão de um corpo sólido em uma outra forma pré-definida. Há dois grandes grupos em que são divididos estes processos de conformação, a saber, os processos mecânicos, nos quais as modificações de forma estão diretamente ligadas às tensões externas aplicadas, e os processos metalúrgicos, em que as modificações na forma advém do efeito das altas temperaturas [BRESCIANI,1997].

Os processos mecânicos, por sua vez, são subdivididos em processos de usinagem, e em processos de deformação plástica, onde a massa e o volume do material conformado se preserva. No primeiro tipo, a tensão aplicada é sempre superior ao limite de resistência do material, enquanto que no último, as tensões são, normalmente, inferiores a este limite.

Neste trabalho, será modelado apenas o processo de conformação mecânica plástica de metais, que está presente em uma ou mais etapas da maioria dos produtos metálicos produzidos no mundo. Através deste processo são obtidas peças no estado sólido, com características controladas, por meio da aplicação de esforços mecânicos externos. Basicamente, o que se busca nesse processo são produtos finais com especificações quanto à dimensão, à forma, às propriedades mecânicas e às condições superficiais.

O controle das propriedades mecânicas dos materiais, bem como do aparato ferramental e das variáveis operacionais, são de fundamental importância para um bom resultado no processo de conformação. Efetuando-se estes controles pode-se eliminar muitas falhas comuns, adequando o material a conformação e, consequentemente, melhorando o produto final obtido. Certos processos, tais como o forjamento ou a laminação a quente, são efetuados por vezes visando não diretamente o produto, mas o controle de qualidade dos materiais primários – por exemplo eliminando bolhas ou porosidades em lingotes fundidos.

Os processos de conformação têm uma grande gama de variações, que vão desde as mais simples, como a operação de dobramento, até as mais elaboradas seqüências de operações de estampagem em grande escala. Apesar de muitas operações de conformação serem extremamente complexas, todas elas consistem de combinações ou seqüências de operações de conformação mais básicas.

A figura 2.1 ilustra perfis típicos de conformação de chapas metálicas finas, em geral, processo que será especialmente tratado neste trabalho:

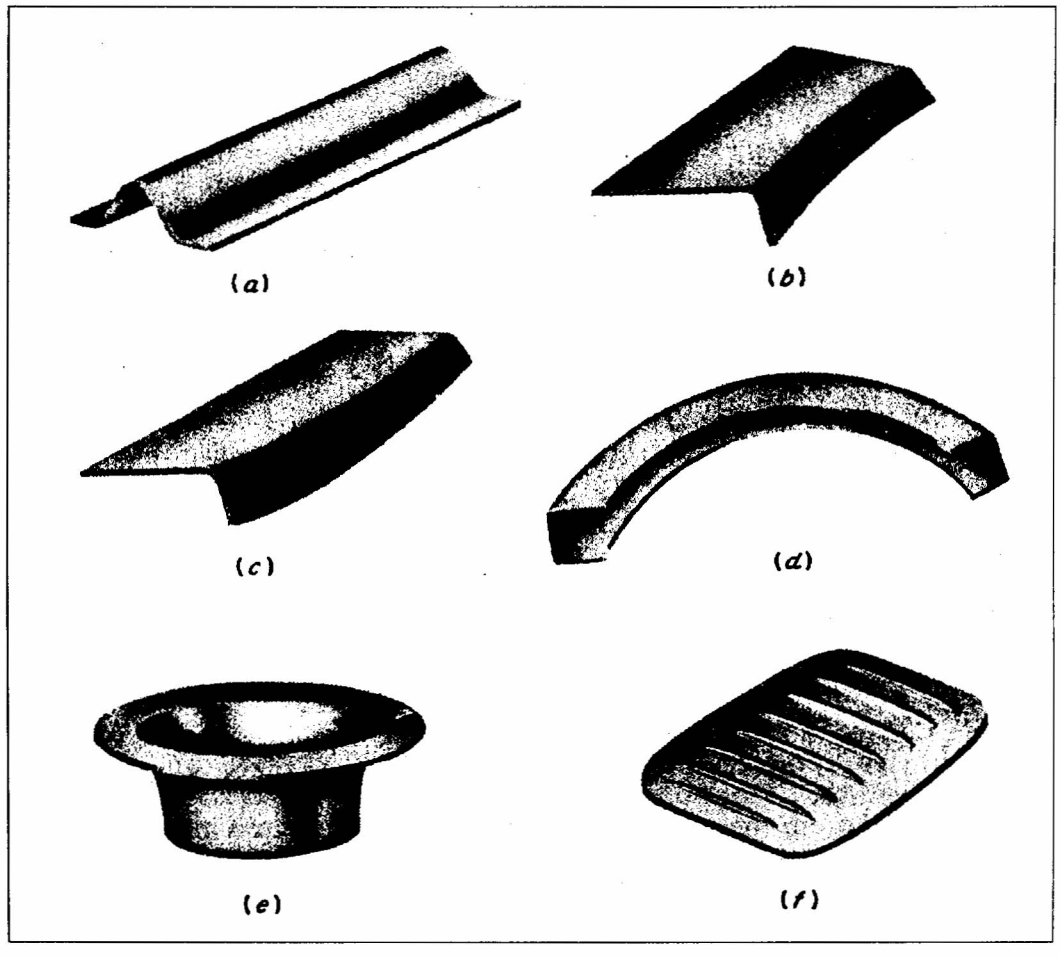


Figura 2.1 – Perfis típicos de conformação de chapas metálicas finas:

a) simplesmente encurvado; b) flange estirado; c) flange contraído; d) seções curvas; e) copo embutido; f) seção corrugada [DIETER,1981].

2.1.1 Classificação de Processos Segundo os Tipos de Esforços

Os diversos processos já criados para aplicações específicas de conformação mecânica podem ser divididos nas seguintes categorias básicas, baseadas nos tipos de esforços aplicados ao se trabalhar o material [DIETER,1981] :

i) Processos de compressão indireta

A força aplicada de modo direto, normalmente é de tração. Surgem, porém, forças de compressão que atingem altos valores. O material escoa sob um estado de tensões combinadas. A trefilação, a extrusão e a estampagem profunda são casos de compressão indireta.

i) Processos do tipo compressão direta

A força é aplicada na superfície do material que é deformado perpendicularmente à ação compressiva. São exemplos tanto o forjamento, como a laminação.

O forjamento consiste na compressão do sólido entre duas superfícies, sendo bastante usado na fabricação de moedas. Dentre suas sub-categorias há: a prensagem, onde o esforço é aplicado de maneira gradual ; o forjamento simples, que aplica golpes e usa matriz aberta ; e o forjamento em matriz fechada, com deformações vinculadas. Em processos de estampagem, o efeito de forjamento é indesejável, porque restringe o movimento da chapa, desregulariza as deformações, e produz defeitos de superfície, tais como as rugas. No preparo de matrizes para a estampagem, muitas das preocupações concentram-se em eliminar esse efeito.

A laminação é o processo em que se força um lingote a passar entre dois cilindros que giram em sentidos opostos, havendo, pois, a deformação plástica, com a diminuição da espessura e o conseqüente crescimento da largura e do comprimento.

iii) Processos de dobramento

Tipo mais comum de deformação; ocorre em quase todos os processos de conformação mecânica. Envolve a aplicação de momentos fletores à chapa ou barra. O dobramento é feito com o controle do raio de curvatura para se prevenir distribuições irregulares de tensões. Em uma determinada operação de dobramento, há um limite de plasticidade, o "raio mínimo de dobramento", abaixo do qual o material trinca na superfície externa. Tal limite é estimado através de ensaios.

Em barras sujeitas ao dobramento existe também o efeito compressivo do forjamento dito livre. Este processo combinado também será alvo de exemplificação neste trabalho, visto que nele podemos analisar claramente os efeitos do atrito na secção da barra.

iv) Processos do tipo trativo

É realizado através da aplicação de esforços de tração perpendiculares à secção de uma chapa, que geram tensões bi-axiais. Tais tensões são maiores que o limite de escoamento do material, que se conforma à curvatura do contorno da matriz. Um exemplo é o estiramento. Muitos processos de estampagem envolvem primeiramente um tracionamento – caso dos automóveis e das panelas.

No processo de estampagem, um dos mais freqüentes defeitos é a fratura devida ao estiramento em estado plano de deformação, que resulta de um alongamento do comprimento sem nenhuma variação da largura; há um tracionamento apenas longitudinal. Ocorre na parede lateral da peça produzida pela estampagem. Neste caso, a deformação na direção circunferencial da chapa é impedida pelas adjacências da própria chapa. Este caso é de muita importância, pois muitos materiais quebram em níveis menores de deformação nestas circunstâncias [TAYLOR,1988].

v) Processos de cisalhamento

Há aplicação de esforços cortantes de forma a romper o material no plano de cisalhamento. O corte em prensa é feito através de duas lâminas paralelas que se movimentam em direções opostas, havendo uma folga entre elas. Esta pequena distância é uma variável importante nas operações de corte.

A figura 2.2, a seguir, ilustra alguns processos de conformação em geral:

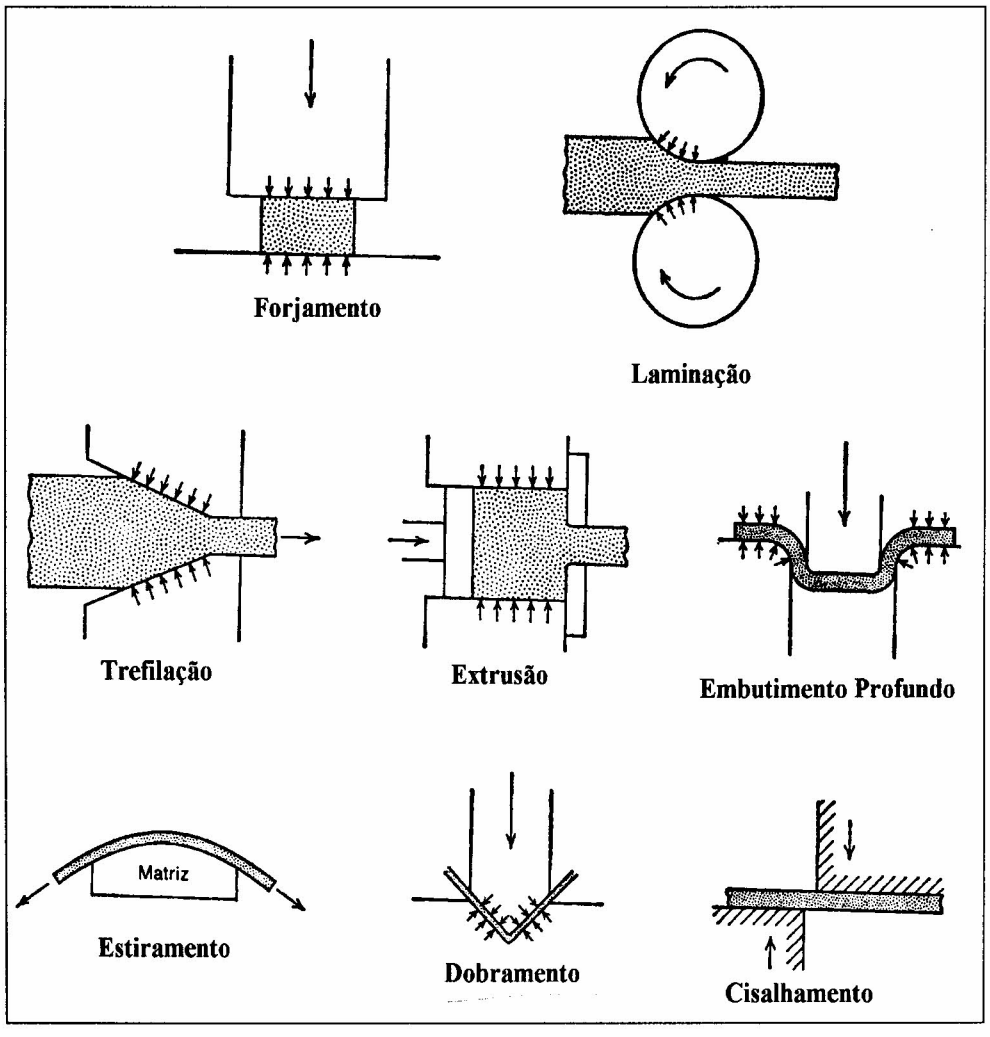


Figura 2.2 – Alguns Processos de Conformação Mecânica Plástica [CHIAVERINI,1986].

2.1.2 Classificação Segundo a Temperatura do Processo

Além da classificação exposta, há também diversas outras, dentre as quais se destaca, no caso de metais, as que dizem respeito à temperatura de trabalho – a frio ou a quente.

O trabalho a quente permite que se obtenha grandes níveis de deformação. Nos metais, ocorre que o aquecimento alivia o encruamento através da formação de novos grãos, livres de deformação devido à recristalização. Este fenômeno de encruamento, ou endurecimento, tratado mais adiante, consiste no desvio de átomos no retículo cristalino, gerando uma estrutura de discordâncias, que reduz a ductilidade do metal e aumenta sua dureza. No trabalho a frio, ou seja, abaixo da temperatura de recristalização, o metal tende a ter suas tensões internas bastante aumentadas com a deformação, já que sofre encruamento severo, tornando-se mais duro e menos dúctil. Devido a isso, necessita-se de mais energia para se deformar e há mais possibilidades de ocorrerem trincas durante a operação. Portanto, a deformação total possível no trabalho a frio é pequena. Contudo, a perda de ductilidade tem um efeito secundário útil, que é o fato de facilitar a operação de corte, ao final do processo [VAN VLACK,1970].

Para se contornar os obstáculos da deformação a frio, pode-se fazer tal operação em várias etapas, havendo entre cada uma delas um recozimento, com o intuito de restaurar a ductilidade perdida pelo metal, ou seja, sua capacidade de se deformar sem sofrer fratura. Já o trabalho a quente permite um emprego de menor esforço mecânico e, consequentemente, máquinas de menor capacidade, além de melhorar a tenacidade do metal, com o refinamento da estrutura. Entretanto, o trabalho a quente exige ferramentas com boa resistência ao calor, que têm um alto custo; e há ainda a desvantagem de se ter um acabamento superficial inferior, devido à presença de óxidos que penetram a superfície do metal.

2.1.3 Outras Classificações

Trabalho mecânico primário é a conformação obtida através de lingotes, que visam a produção de formas simples tais como placas, tarugos, barras e chapas. Através destas formas primeiras, pode-se gerar os objetos definitivos, sendo esta etapa chamada de trabalho mecânico secundário. Os estampos, arames, tubos e peças forjadas são frutos desta segunda etapa.

Dentre outras tantas classificações, pode-se citar ainda a que designa a classe conforme as formas do material a ser trabalhado, tais como as chapas, os tubos e os fios. Outra classificação, ainda, diz respeito à forma de aplicação dos esforços na conformação, que pode ser realizada através de prensas hidráulicas – cargas de maior duração, cujas velocidades variam de *0,003m/s* a *3m/s* – ou por meio de prensas mecânicas – cargas de curta duração, com velocidades de *0,15m/s* a *1,5m/s*. Hoje há também métodos alternativos, como a conformação por explosão, que atinge altíssimos valores de velocidade – até *120m/s* [BRESCIANI,1997].

A estampagem profunda, no caso das chapas finas, é um exemplo de processo realizado a frio e em várias etapas, utilizando, em grande parte dos casos, a prensa hidráulica.

2.2 O Processo de Estampagem Profunda de Metais

Será aqui detalhado o processo de estampagem profunda, também chamado de embutimento, cuja modelagem computacional será efetuada e analisada nos capítulos últimos desta tese. Isto porque o embutimento é hoje o principal processo de conformação mecânica de chapas e, apesar disto, a indústria ainda se utiliza de métodos empíricos nos projetos das ferramentas necessárias para o dito processo, acarretando com isso altos dispêndios de energia, nesse longo trajeto de tentativas e erros.

2.2.1 Descrição do Processo

A estampagem é dita profunda quando a relação entre as profundidades alcançadas e o diâmetro é grande. É o processo de conformação utilizado para modelar chapas planas, transformando-as em objetos ocos, tais como um copo, uma panela ou uma roda de automóvel. Em geral é realizado a frio e consiste na aplicação de punção sobre chapa colocada sobre uma matriz de forma definida, forçando o metal a escoar para o interior da matriz, adquirindo afinal a forma do conjunto matriz– punção. Normalmente, na produção de estampos, é necessário haver o uso de um anel de fixação – também dito anel prensa-chapas ou anti-rugas – aplicado desde o início da operação, a uma pressão apropriada, e mantido durante todo o curso do processo. Este anel tem o objetivo de evitar o enrugamento nas bordas da chapa [KONINCK,1980].

É pratica comum se controlar o movimento de entrada da borda da chapa na cavidade da matriz com o auxílio de saliências semi-cilíndricas ao longo do anel fixador. Estas saliências se encaixam nos respectivos sulcos semi-cilíndricos entalhados na parte externa da matriz. A periferia da chapa chega a se curvar e recurvar até três vezes, quando está passando através dos "leitos" rumo a cavidade da matriz. As forças que daí surgem, vêm se adicionar àquelas derivadas apenas do atrito simples advindo da prensagem da chapa [TAYLOR, 1988]. A figura 2.3 ilustra o processo de estampagem profunda.

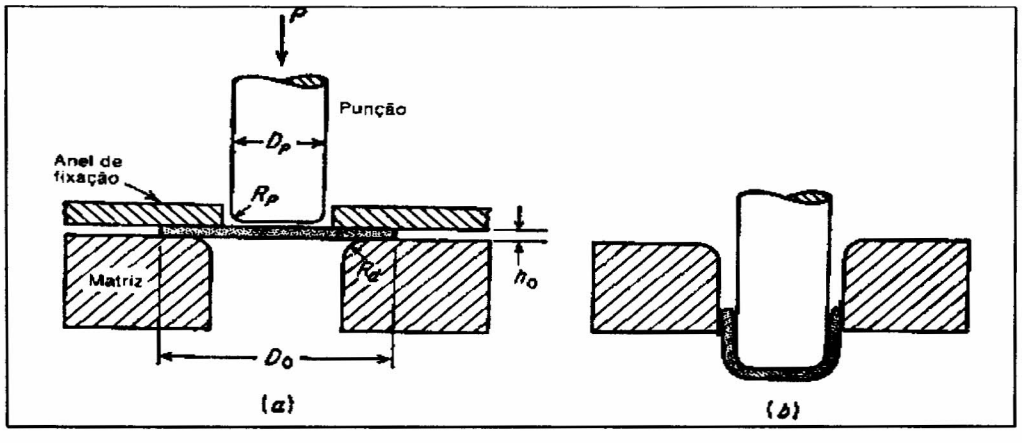


Figura 2.3 – Estampagem profunda de um copo cilíndrico: a) antes da estampagem ; b) após a estampagem [DIETER,1981].

A estampagem, conforme já visto, é um processo de compressão indireta; a chapa escoa sob um estado de tensões combinadas. Isto porque, de início, ela é tracionada radialmente. Sendo segura pelas forças de atrito derivadas da fixação da orla, a chapa é esticada através do punção aplicado em seu centro. Indiretamente, porém, em suas bordas surgem altas tensões de compressão, na direção perpendicular ao raio, ou seja, circunferencialmente; isso se dá conforme as bordas começam a caminhar para a curva do embutimento de fato. Neste movimento ocorre também um aumento contínuo da espessura, porém ao fletir e em seguida endireitar sob tração, esta espessura diminui um pouco.

Na figura, observamos os estados de tensões na orla (borda) da chapa, na parede do copo e na região do punção (fundo do copo):

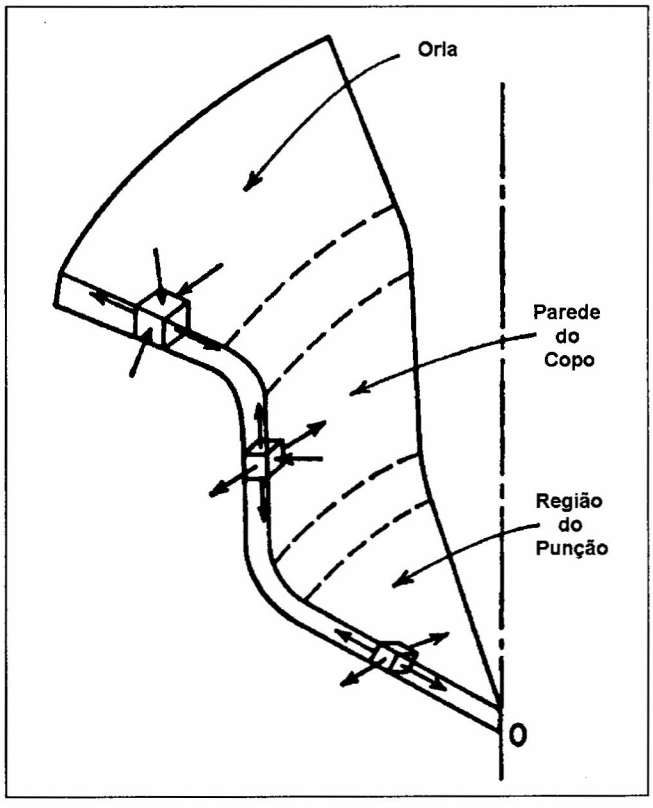


Figura 2.4 – Tensões e deformações presentes em uma seção de um copo embutido [DIETER,1981].

As tensões atuantes em cada uma das partes mostradas na figura anterior, são melhor detalhadas na figura a seguir:

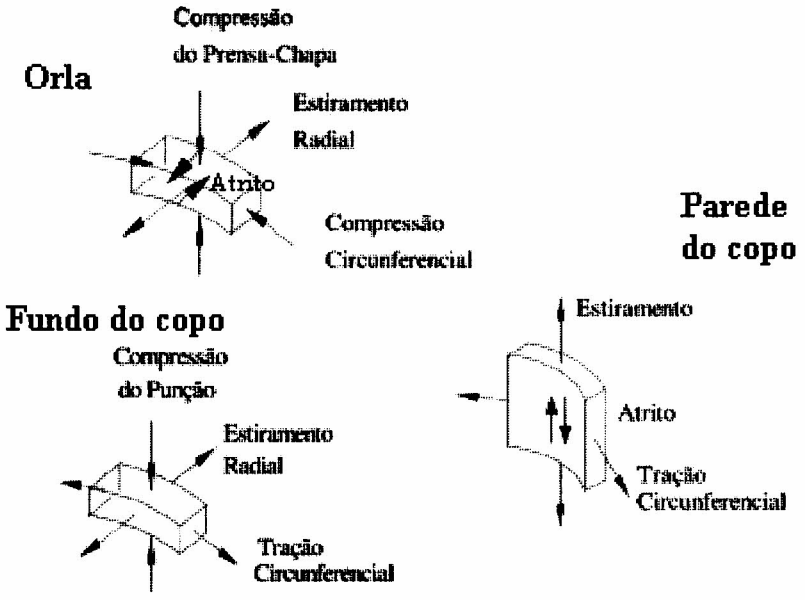


Figura 2.5 – Detalhe das tensões atuantes em cada parte de uma chapa embutida: orla, parede e fundo do copo[BRESCIANI,1997].

Estes estados de tensão causam uma ou mais variações de espessura, fazendo com que o copo fique com um aspecto próximo ao mostrado abaixo, de maneira exagerada:

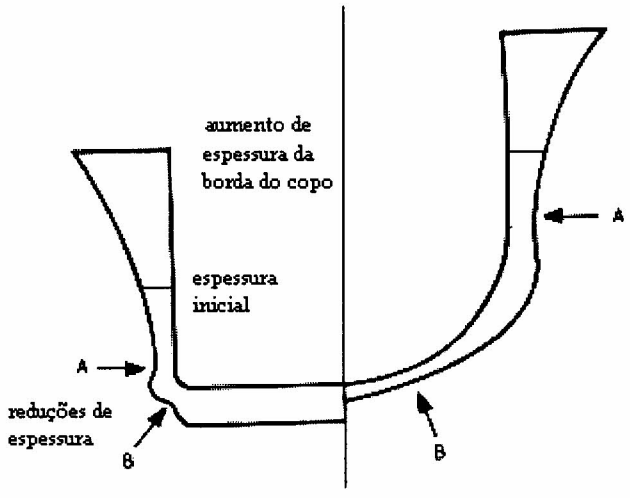


Figura 2.6 – Seções exageradas de copos embutidos [PEARCE,1991].

O esforço total exercido pelo punção, ou seja, o esforço de estampagem, é igual a soma dos esforços atuantes em todas as partes do copo. Se o esforço de estampagem causar, em qualquer lugar do copo, tensões superiores ao limite de resistência do material da chapa, ocorrerá fissura [BRESCIANI,1997].

Na curva traçada a seguir, observa-se que a máxima força ocorre logo no início do embutimento da chapa, diminuindo assim que o punção vai penetrando na matriz.

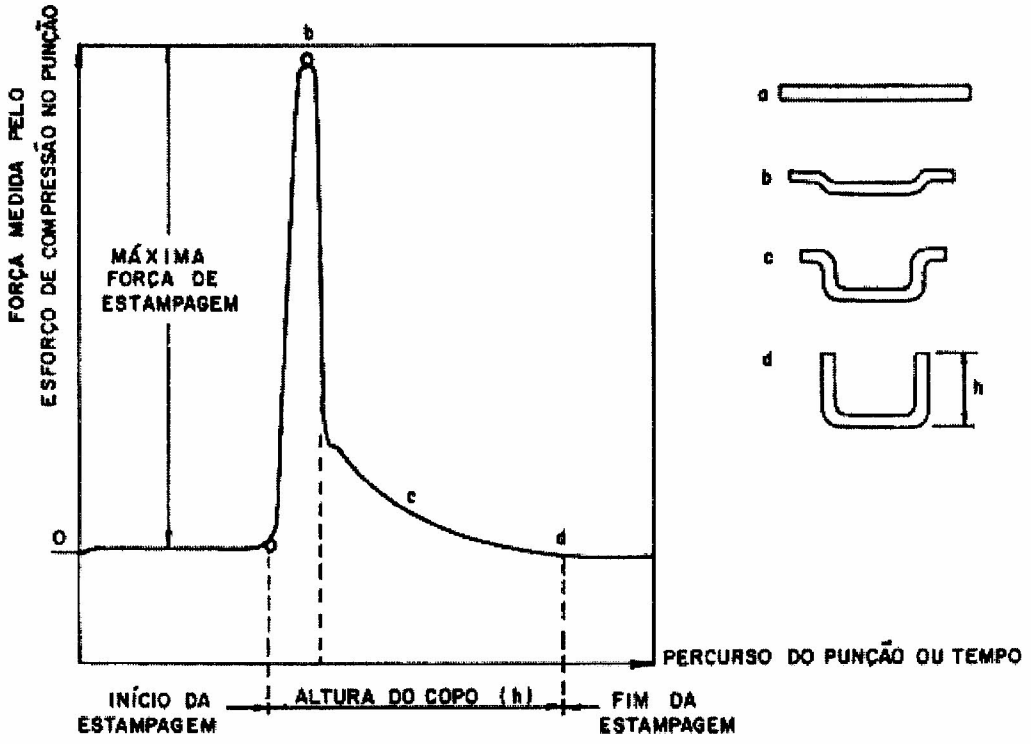


Figura 2.7 – Esforços de estampagem medidos no punção [EARY,1958].

Conclui-se portanto que a condição de tensão máxima acontece do início para o meio do processo de conformação, devendo surgir, neste período, efeitos de enrugamento da aba, ou de fissuramento lateral, defeitos explicitados adiante.

2.2.2 Acerca dos Ensaios Empíricos

Os fatores que controlam a operação de estampagem profunda são bem conhecidos, porém a interação entre eles é bastante complexa. Devido a isto, não foi possível ainda fazer uma descrição matemática com precisão satisfatória. Para se contornar tal obstáculo, existem diversos tipos de ensaios que simulam os tipos fundamentais de conformação, sendo que a estampagem é uma combinação desses tipos.

Basicamente são dois os tipos de ensaios: os intrínsecos e os simulativos [TAYLOR,1988]. Os testes intrínsecos medem propriedades características básicas que devem ser conhecidas na conformação. Os testes simulativos sujeitam o material a deformações que se assemelham às que ocorrerão na prática, quando da operação de conformação.

2.2.2.1. Ensaios Intrínsecos

De tais testes provêm informações que não podem ser visualizadas diretamente nas condições da espessura ou da superfície do material. Abaixo seguem alguns dos mais importantes:

i) Ensaio de tração uniaxial

O mais importante e mais utilizado teste é o ensaio de tração uniaxial, o qual permite a obtenção de várias propriedades características do material para uma ampla faixa de operações. Embora seja uma simplificação muito grande do problema real, qualitativamente ajuda muito a entender como se processa a deformação do material, desde o início até atingir a ruptura.

O teste é baseado numa visualização ideal do problema físico. As hipóteses básicas são: a) a carga é puramente axial; b) a deformação ocorre uniformemente ao longo do comprimento e da seção transversal da barra.

ii) Ensaio de compressão de cilindro curto entre batentes

É o mais indicado para medir a tensão de escoamento nas aplicações de conformação, pois não existe o problema de estricção. O atrito entre a amostra e os batentes deve ser controlado, pois o cilindro tende a abaular, tomando a forma de um barril. Isto se deve ao fato de que sua movimentação nas superfícies em contato está dificultada, enquanto que, no meio da altura da amostra, é livre o escoamento na direção radial.

Conforme podemos observar na figura 2.8, há uma região do metal – que está hachurada – não deformada, próxima aos batentes.

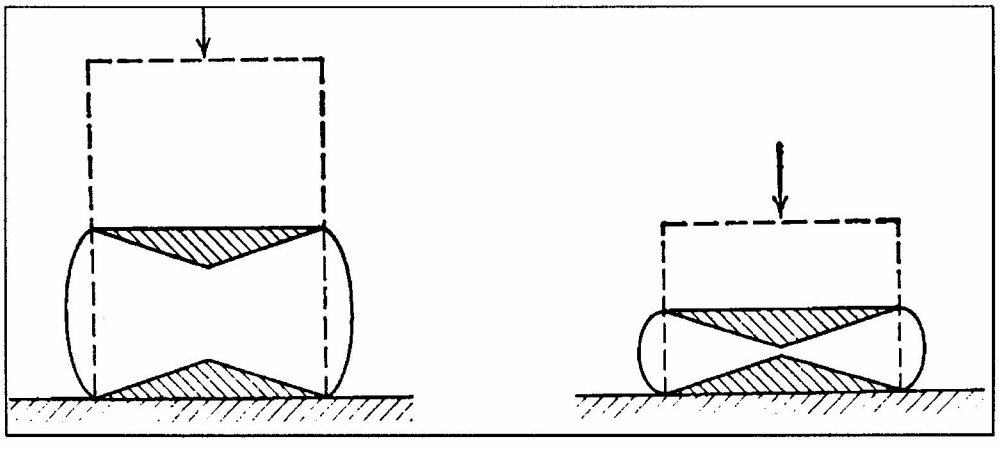


Figura 2.8 – Regiões hachuradas mostram partes não deformadas na compressão de dois cilindros entre batentes [DIETER,1981].

Esse ensaio é exemplificado nesta dissertação através da modelagem e solução pelo método dos elementos finitos.

iii) Ensaio de compressão em situação de deformação plana

Neste teste a deformação mínima, no caso a deformação na largura é desprezível, gerando um estado de tensões diferente do ensaio de tração uniaxial, onde a deformação mínima é negativa. É o mais indicado para se testar folhas metálicas finas.

O ensaio consiste na compressão através de dois punções, de uma faixa estreita ao longo da largura de um filete de chapa metálica, como pode ser visto na figura 2.6. Tem as vantagens de eliminar o problema do abaulamento da amostra e de não ter tão rápido crescimento da força de compressão, como no caso do cilindro do teste anterior.

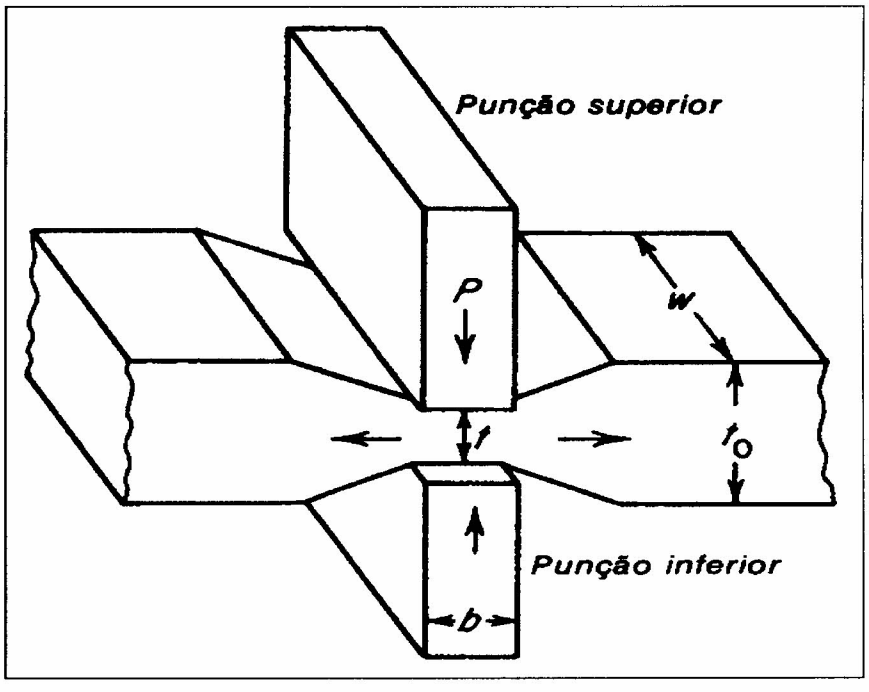


Figura 2.9 – Ensaio de compressão na deformação plana [DIETER,1981].

iv) Ensaio de torção a quente

É um bom método para se medir propriedades de conformação, pois pode produzir grandes deformações. Apesar disto, pode haver dificuldade na interpretação de resultados, pois a tensão varia radialmente num copo cilíndrico sólido, podendo haver

menor encruamento no centro da amostra que em sua superfície externa. Para se contornar tal problema utiliza-se corpos-de-prova cilíndrico- tubulares, de preferência não muito longos – para se evitar a flambagem.

2.2.2.2 *Ensaios Simulativos*

A maior parte dos estudos experimentais e teóricos têm sido realizados efetuando-se um embutimento de um copo com o fundo plano, a partir de um disco plano – o chamado ensaio *Swift*. A partir desta situação relativamente simples pode-se obter muitos dados para os casos mais complexos. Vide a figura 2.3 , apresentada no início da seção 2.2.1 deste capítulo, que representa a estampagem profunda e, do mesmo modo, representa o funcionamento deste teste, seu simulacro.

2.2.3 *Estampabilidade*

A estampabilidade de um material é medida pela razão entre o diâmetro inicial do disco e o diâmetro final do copo estampado, num ensaio simulativo. Para cada material existe um limite que deve ser respeitado para se evitarem problemas. Quando ocorre, a ruptura costuma acontecer numa faixa estreita de material, na parede do copo, imediatamente acima da base do punção. Essa banda não foi dobrada ou deformada radialmente, mas sim submetida à deformação por tração, o que reduz a espessura, propiciando a falha por estricção [LYMAN,1969].

Para se melhorar a estampabilidade, pode-se aumentar a resistência dessa área, mais propensa à ruptura. Pode-se também deslocar o local potencial de ruptura, apertando o copo em torno do punção, através de uma almofada pressurizada de borracha na saída da matriz, ou tornando áspera a superfície do punção ou mesmo impedindo a sua lubrificação. A melhor maneira, no entanto, é através do controle da textura cristalográfica, aumentando o coeficiente de anisotropia – adiante definido – ,

significando que a chapa oferecerá uma maior resistência à deformação na direção da espessura que no plano da chapa.

Outras propriedades metalúrgicas tais como o expoente de encruamento, n, e o coeficiente de sensibilidade à taxa de deformação, m, também afetam a estampabilidade, conforme veremos adiante.

É praticamente impossível obter em uma única operação de estampagem, uma peça com altura muito maior que o diâmetro. Quando se deseja produzir peças altas e delgadas, ou de geometrias complexas, costuma-se fazer a operação em vários estágios. Essa operação é conhecida como expansão de copo ou reestampagem.

Alguns métodos clássicos de expansão de copos são mostrados na figura 2.10 :

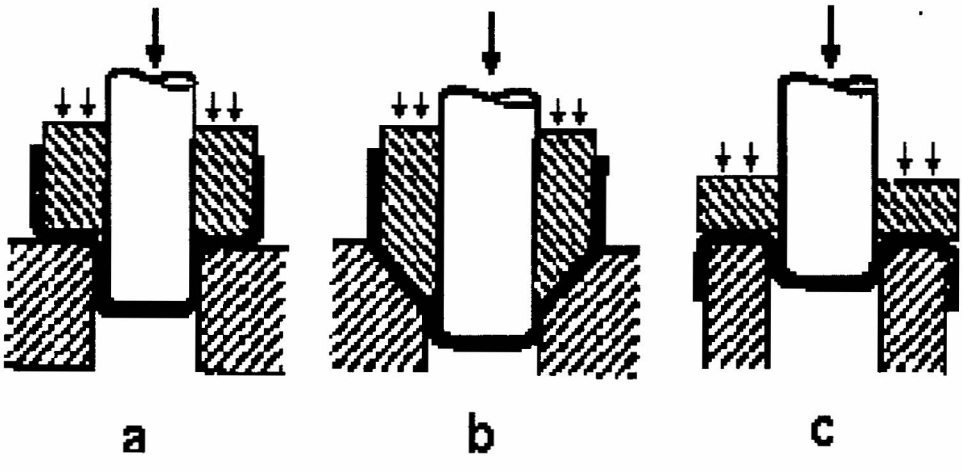


Figura 2.10 – Métodos de expansão de copos embutidos [CHIAVERINI,1986]

a) reestampagem direta, ou de ação simples;

b) reestampagem direta com matriz cônica, ou de ação dupla;

c) reestampagem inversa ou expansão indireta.

A figura 2.11 mostra os principais componentes de uma prensa hidráulica de matriz cônica:

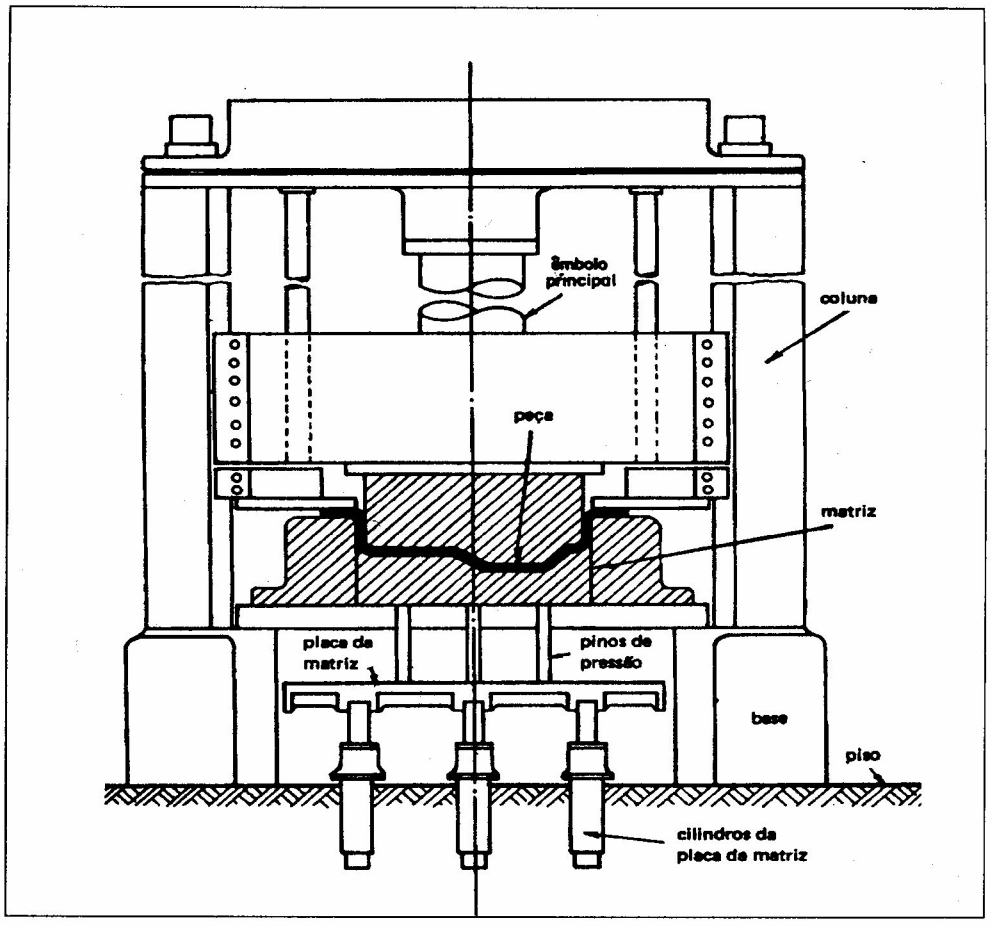


Figura 2.11 – Prensa hidráulica de matriz cônica [CHIAVERINI,1986].

Na prática existem alguns dados empíricos que afetam a estampabilidade [LYMAN,1969]. São eles:

i) Raio da matriz –Deve ser cerca de 10 vezes a espessura da chapa.

ii) Raio do punção – Um ângulo muito agudo leva à redução de espessura localizada e ruptura do material.

iii) Folga entre o punção e a matriz – Deve ser um tanto maior do que a espessura da chapa, permitindo o aumento de espessura na entrada do copo. Normalmente utilizam-se folgas de 20% a 40%, podendo variar em alguns casos. Se a folga usada for demasiadamente pequena pode haver cisalhamento da chapa. Caso contrário, se houver folga em excesso, pode ocorrer uma deformação do perfil na parede do copo, ou mesmo um desvio do punção.

iv) Pressão de fixação – Deve ser cerca de 2% da média entre o limite de escoamento e o limite de resistência.

v) Lubrificação da superfície lateral da matriz para reduzir o atrito – Desta forma são minimizadas: as perdas de material da peça para as ferramentas; o desgaste das ferramentas por abrasão ou fadiga; o aquecimento da peça e das ferramentas, que não devem ter suas propriedades mecânicas alteradas. Os lubrificantes melhoram também o acabamento superficial, através da distribuição mais uniforme das deformações.

2.2.4 Fenômenos Problemáticos na Conformação de Chapas

Os principais problemas ocorrentes na conformação são: fraturas, rugas e ondulações, distorções, textura superficial inadequada e frouxidão do metal. A ocorrência de um ou mais destes problemas podem culminar na perda, por vezes até justificada, de grandes lotes de peças prontas. Há exigências de segurança, como resistência e ductilidade, que devem ser respeitadas. Há também problemas de apresentação estética, embora normalmente fúteis, que se busca evitar com muito afinco na economia do lucro.

2.2.4.1 Fratura

A fratura ocorre quando uma chapa está sujeita a tracionamento ou cisalhamento que excedam os limites de falha do material, em determinada temperatura, estado de deformação ou taxa de deformação. As fraturas podem ser de dois tipos, a saber, dúctil e frágil. Na fratura frágil, as partes adjacentes do material são separadas por tensões tangentes a planos de corte, as tensões de cisalhamento, não produzindo deformação plástica. A fratura dúctil requer mais energia que a frágil, pois consome energia tanto no cisalhamento plástico – escorregamento entre planos cristalinos paralelos – como na formação de discordâncias e outras imperfeições no interior dos cristais [VAN VLACK,1970].

No caso da tração, ocorre a fratura dúctil, onde ao início da plastificação, a chapa afina de maneira uniforme. Eventualmente um ponto de concentração de deformações causa o afinamento de uma região, o que favorece à fratura. É o fenômeno chamado estricção ou empescoçamento. No caso do cisalhamento, ocorre a fratura frágil, sem haver o afinamento. Nestas operações, as chapas são cisalhadas através da aplicação de forças normais ao plano da chapa. Falhas motivadas por cisalhamento são encontradas na estampagem, embora sejam muito menos comuns que as geradas por tração.

2.2.4.2 Rugas e Ondulações

Numa estampagem típica, o punção, ao embutir a chapa na cavidade da matriz, comprime-a na direção circunferencial, conforme já exposto, originando tensões de compressão. Se estas tensões atingirem um valor crítico, característico do material e de sua espessura, ocorrem leves ondulações na periferia da chapa. Se a pressão do anel fixador não for suficiente, estas ondulações são mais pronunciadas, e são então chamadas de rugas. O enrugamento ocorre também em regiões com variações abruptas de secção ou em regiões em que o metal é suportado apenas em um lado – quando há

perda de contato em uma das faces. Em situações extremadas podem formar-se até rugas duplas ou triplas. Para se solucionar este problema é necessário que a pressão do anel fixador – ou anel anti-rugas – seja suficiente para conter tais flambagens da chapa. Além disto, o aumento da velocidade do punção diminui as rugas [IBRAHIMBEGOVIC,1996]. Será adiante apresentada modelagem computacional ilustrativa desta falha.

2.2.4.3 Retorno-Elástico

Na conformação, o metal é deformado tanto elástica quanto plasticamente. Após a remoção das forças externas, as forças internas elásticas relaxam. Em alguns pontos, este relaxamento é completo, quase não havendo mudança nas dimensões da chapa. Entretanto, em áreas sujeitas à flexão, surgem altos gradientes de tensão elástica ao longo da espessura da chapa. Isto na prática significa que as tensões nas faces externa e interna serão diferentes. Se estas tensões não forem restritas ou alocadas pela geometria local, essa relaxação causará o retorno-elástico ou efeito de mola, ilustrado abaixo:

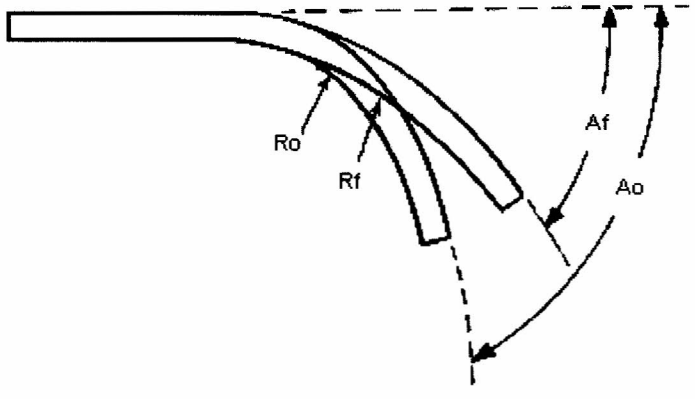


Figura 2.12 – Retorno-elástico, onde R_o é o raio original e R_f é o raio após o retorno elástico, com seus respectivos ângulos [PEARCE,1991].

Tal problema pode ser prevenido através de um projeto de matriz voltado às propriedades materiais de um certo tipo de metal. Além disto, devem ser observadas com rigor as tolerâncias dimensionais. Porém, em muitos casos, onde se utilizam metais com grande número de propriedades materiais, ou mesmo onde há muita variação nos tipos de material usados, o problema tende a persistir. Uma maneira de enfrentá-lo, então, é aquecendo o metal até o ponto em que a tensão de escoamento seja igual ou inferior às tensões residuais, pois assim o corpo se deforma, aliviando as tensões.

Outra forma de contornar o problema é produzindo uma ação de cunhagem, calcando o punção no fundo da matriz, redistribuindo o estado de tensões da peça. Este é um problema muito em voga na modelagem computacional, devido ao perigo de fratura por afinamento.

2.2.4.4 Frouxidão

Ocorre em regiões não sujeitas diretamente à deformação e é indesejável devido à alta suscetibilidade à flexão. Outro fenômeno, conhecido por *escorregamento*, no qual uma região pode tornar-se côncava ou convexa, também pode ser encontrado nessas situações. Nos processos de estampagem com duas ou mais curvaturas acentuadas de mesmo sinal – mesma direção – o metal tem também tendência à frouxidão; isto se dá devido à dificuldade de se puxar um metal submetido à curvaturas muito acentuadas.

Em alguns casos há a possibilidade de se evitar tal problema prendendo a chapa que não entra em contato com as duas linhas de curvatura da estampagem ao mesmo tempo; assim, alguns estiramentos podem ocorrer antes de haver contato com a segunda linha. A maior tendência à frouxidão do metal ocorre nas proximidades do centro da largura da chapa, ou em superfícies lisas, ou ainda em partes com curvaturas leves [TAYLOR,1988].

2.2.4.5 *Defeitos Superficiais*

Em chapas metálicas com grandes deformações realizadas a frio, freqüentemente se desenvolvem superfícies extremamente rugosas, principalmente se o grão do metal estampado é grande. Este fenômeno é chamado de efeito casca-de-laranja; resulta do fato de que os grãos individuais tendem a se deformar independentemente uns dos outros, sendo que alguns acabam ficando em relevo na superfície da chapa [CHIAVERINI,1986].

Outra anomalia comum no trabalho mecânico a frio são as Linhas de Distensão ou Bandas de *Lüders*. Ocorre em chapas de aço-baixo-carbono quando o material é deformado na faixa de escoamento. Nestes metais, em baixas taxas de deformação plástica, há a concentração de deformações em bandas irregulares. São depressões, inicialmente ao longo dos planos de máxima tensão de cisalhamento. A medida que a deformação prossegue, as depressões se espalham, se juntando novamente, por fim, e produzindo uma superfície áspera. Este efeito desaparece para médias e altas taxas de deformação. Entretanto, sempre algumas partes da chapa sofrem baixas deformações, mas normalmente isto acaba sendo insignificante.

Aços envelhecidos e algumas ligas de Alumínio desenvolvem significativas bandas de *Lüders*. Pode-se superar este problema com ligeira laminação à frio. Sujeiras ou ranhuras na matriz, má lubrificação e esfolamentos causados por uma dureza inadequada, são também causas dos defeitos superficiais de textura [DIETER,1981].

A seguinte figura 2.13 ilustra alguns dos problemas mais comuns em peças estampadas:

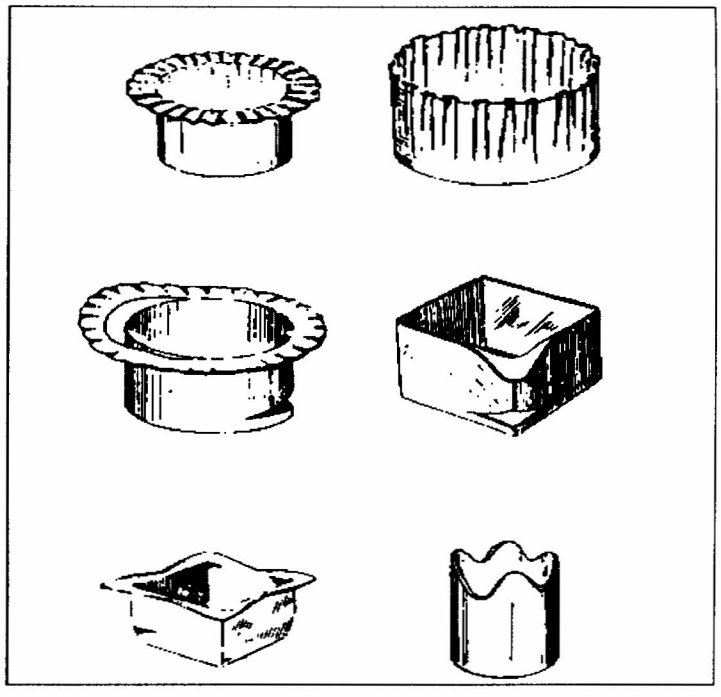


Figura 2.13 – Defeitos comuns em peças estampadas: enrugamentos e fraturas [KOBAYASHI,1989].

2.2.5 Matéria-Prima e Produto

A escolha de um material adequado às necessidades de uma particular operação de conformação é um fator primordial para se obter um produto que satisfaça as características que dele são exigidas. Há muitos tipos de metais a se escolher, e esta escolha deve ser feita conforme a aplicação. Na seleção de um material deve-se levar em consideração tanto as exigências funcionais requeridas, quanto as propriedades de conformação do material avaliado.

Fraturas, estricções, rugas e ondulações, texturas inadequadas, entre outras falhas em peças acabadas, são motivo de muitas recusas de lotes, na indústria metalúrgica. Por vezes o motivo é mais decorativo do que estrutural. Noutros casos, porém, há a exigência que a peça tenha tanto resistência quanto ductilidade. É o caso das estampas que têm uma finalidade estrutural, tais como as peças que formam o corpo

de automóveis, as carcaças de bombas para direções hidráulicas, os cilindros de extintores de incêndio, as laterais para corpos de carros monoblocos, entre outros. O comportamento do aço após a conformação de peças com exigências estruturais é particularmente importante. Algumas vezes há especificações mínimas de resistência. Elas podem indicar que, depois de carregada, a peça deva suportar valores de tensões pré-estabelecidos, sem ruptura e sem extrapolação dos limites toleráveis de variação dimensional. Além disto, pode-se ainda exigir que a peça apresente certa ductilidade após conformada. Assim, no caso do limite de escoamento ser superado, o material se deformaria, reduzindo, pois, o excesso de carga e evitando, quiçá, um possível desastre.

Outras exigências tais como a espessura mínima, por motivos práticos da engenharia, são impostas visando controlar a capacidade de carregamento e de tensão em peças específicas. Em materiais que sofrem carregamentos alternados, o controle das propriedades de fadiga também se faz necessário.

Todas as exigências devem ser levadas em consideração no ato da escolha do metal a ser usado. A estampabilidade não é o único critério. É necessária a consideração do desempenho da peça acabada.

As propriedades da chapa metálica a ser conformada variam consideravelmente, dependendo da base metálica a ser utilizada, do processo e do tipo de tratamento – a quente ou a frio.

Em síntese, para uma conformação ótima do material, deve-se:

i) ter distribuição uniforme de deformação;

ii) atingir altos níveis de deformação sem fraturar ou sofrer estricções;

iii) ter bom desempenho na compressão plana – sem formação de rugas – e no cisalhamento plano – sem fraturar;

iv) conservar a parte da chapa a ser removida da matriz, evitando desperdícios;

v) ter uma superfície lisa e resistente a possíveis danos.

O alumínio é um dos mais abundantes metais estruturais. Além disto é bastante resistente, sendo que algumas de suas ligas excedem a resistência do aço. Normalmente, em estampagens, é utilizado o alumínio no estado recozido, pois conta com o mínimo limite de escoamento e a maior possibilidade de deformações. O alumínio tem muitas vantagens sobre o aço-baixo-carbono, como a excelente resistência à corrosão e a alta resistência à compressão. A liga de alumínio designada pelo número *3003*, no estado recozido tem ótimas características para o embutimento. Sendo muito usada na indústria automobilística e aeronáutica, será um dos materiais utilizados para a modelagem computacional da estampagem profunda, ao fim deste trabalho, além do aço.

Já o aço para estampagem deve apresentar as seguintes características básicas, a saber: baixos teores de Carbono, Manganês, Silício, Fósforo e Enxofre; baixos níveis de inclusões; homogeneidade ao longo do lingote; baixos níveis de segregação; condições favoráveis à obtenção de uma boa superfície laminada final. Os tipos de aços mais comuns usados na estampagem são: i) aços efervescentes, aplicados em peças não sujeitas à exposição, onde a estampabilidade não é alta, em casos de estampagem pouco profunda; ii) aços estabilizados, utilizados tanto em peças expostas pouco profundas, como em peças não-expostas profundas; iii) aços acalmados com alumínio, usados em peças críticas, com estampagem problemática, expostas ou não; iv) aços livres de interstícios, são o tipo mais indicado para estampagens altamente críticas [NEWBY,1988].

2.3 Acerca dos Métodos e das Propriedades Metalúrgicas

Nesta seção, apresentaremos os conceitos essenciais metalúrgicos necessários à interpretação científica do comportamento mecânico dos metais, especialmente no tocante às chapas. Inicialmente, discorrer-se-á a respeito das medidas de deformação, bem como dos principais métodos de medição utilizados para se obter informações a respeito das deformações do material. Em seguida serão explanadas e definidas as propriedades metalúrgicas, que determinam o modo como são distribuídas as

deformações. Por fim, será exposto e interpretado o Diagrama Limite de Conformação, método gráfico que fornece os limites suportáveis numa operação de conformação.

2.3.1 Medidas de Deformação

O principal método de medida de deformação, no caso da estampagem, são as marcas de segurança. Há ainda métodos alternativos como o dos extensômetros e o dos medidores de forma e espessura. Antes da apresentação destes métodos, porém, veremos como a deformação pode ser representada matematicamente.

2.3.1.1 Representações das Deformações

O mais comum método de representação da deformação define a deformação convencional, e, como sendo a razão entre a variação do comprimento, ΔL, e o comprimento original, L_0:

$$e = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \qquad (2.1)$$

Um segundo método define a deformação verdadeira, ε, na região de alongamento uniforme, como sendo a integral do incremento do comprimento, dL, dividido pelo comprimento do material deformado, a cada instante, L:

$$\varepsilon = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln(1 + e) \qquad (2.2)$$

O primeiro método é mais facilmente calculado e é satisfatório para muitas aplicações. A deformação verdadeira é usada nas análises teóricas e é vantajosa nas definições sucessivas, pois pode ser diretamente adicionada, obtendo-se, assim, a deformação acumulada [WAGONER,1997].

No plano de uma chapa, o estado de deformação é normalmente representado graficamente, com a máxima deformação no eixo vertical e a mínima no eixo horizontal, conforme veremos adiante, no Diagrama Limite de Deformação.

2.3.1.2 Marcas de Segurança

As marcas de segurança na superfície da chapa são a técnica operacional mais utilizada, atualmente, para se garantir que uma matriz está adequadamente preparada para uma operação, bem como para diagnosticar as causas de defeitos que possam surgir tais como a estricção e a fratura [NEWBY,1978].

Consistem em marcas na chapa, geralmente circulares e igualmente espaçadas, por isto conhecidas como grade-de-círculos. São feitas ou por meio de risco mecânico, ou através de gravação eletroquímica por corrosão, ou ainda, através de impressão fotográfica por exposição de resina fotossensível à forte radiação ultravioleta. Conforme NEWBY [1978], devem ser feitas linhas estreitas e círculos pequenos, com *2,5mm* de diâmetro. Após a deformação da chapa mede-se, nos locais críticos, as variações dimensionais nas marcas e suas direções, podendo-se usar, para tanto, o conceito de deformação convencional ou verdadeira, conforme o caso.

Na maior parte das operações de conformação e nos últimos estágios dos ensaios de tração observa-se grandes diferenças nas medidas de deformação de uma marca para outra. A forma circular das marcas têm a vantagem de facilitar a identificação das direções de máxima e mínima deformação, e assim medir estes valores. Com a deformação, os círculos se transformam em elipses, estando o eixo maior na direção de máxima deformação e o menor na de mínima deformação. Esta informação é essencial para se determinar o quão próxima a região deformada está de seu limite máximo,

alertando para a possibilidade de ocorrências de fraturas, que são função da taxa de deformação. Para tanto, loca-se os pares de deformações locais no diagrama limite de conformação, cuja utilização e obtenção será explanada adiante; esta combinação de deformações pode ser observada na figura 2.14, onde podemos visualizar algumas marcas circulares deformadas, no lugar geométrico do plano gráfico onde ocorrem:

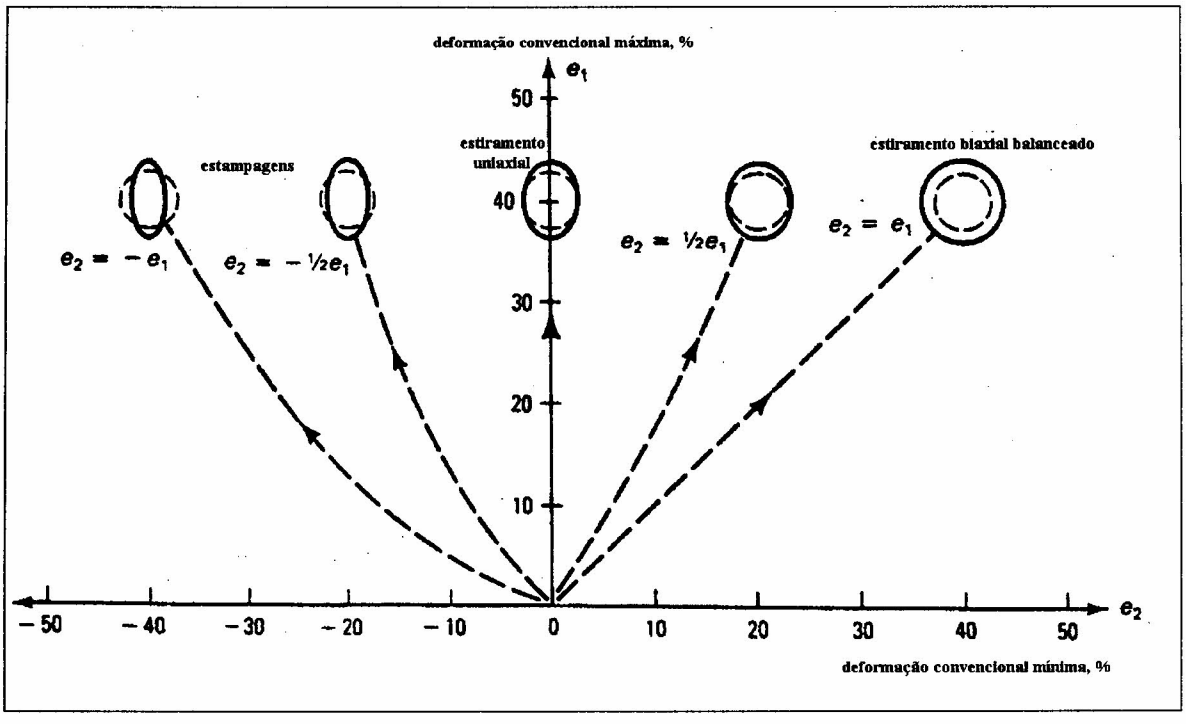


Figura 2.14 – Esquema de algumas combinações de deformações máximas e mínimas [TAYLOR,1988].

2.3.1.3 Métodos e Acessórios Alternativos para Medição de Deformações

São importantes métodos utilizados empiricamente nas medições de deformações [TAYLOR,1988]:

i) Extensômetros

Um extensômetro é um medidor de deformações. É usado para se obter valores durante a operação de conformação. Tais valores devem estar abaixo dos níveis limites

exigidos para um processo seguro. O aparelho é afixado à chapa a ser testada. Pode ser usado também o extensômetro óptico, que é mais eficiente para altas taxas de deformação.

ii) Medidores de Espessura e de Forma

Na determinação das deformações, pode-se utilizar medidas de espessura, que podem ser rapidamente obtidas através de métodos ultra-sônicos. Este método esta limitado à situação na qual a taxa de deformação máxima e mínima são conhecidas previamente, pois muitas diferentes combinações de deformação podem gerar a mesma variação na espessura.

A forma da chapa pode ser medida através de fôrmas, gráficos de sombra ou medidores de contorno em contato com a superfície. Estes medidores de contorno podem dar representações digitais em duas ou três dimensões. Digitalizadores de superfície que não entram em contato com a chapa e sistemas de medição de deformação por localização de marcas na chapa em três dimensões vêm sendo também usados.

2.3.2 *Propriedades Metalúrgicas: Distribuição de Deformações*

São três as principais propriedades metalúrgicas que determinam a distribuição das deformações na operação de conformação mecânica, afetando sensivelmente a conformabilidade do material e, por conseguinte, a sua chance de sucesso na produção de uma peça, a saber:

i) O expoente de encruamento, n;

ii) O coeficiente de sensibilidade da tensão de escoamento à velocidade de deformação, m;

iii) O coeficiente de anisotropia, *r*.

A capacidade de distribuir as tensões, igualmente depende dos valores *n* e *m*. Já a capacidade de se obter altos níveis de deformação dependem de vários fatores, tais como as ligas de elementos utilizadas, a temperatura de operação, a espessura do metal, a uniformidade e ausência de defeitos, e os valores *n*, *m* e *r* [TAYLOR,1988].

2.3.2.1 Coeficiente de Encruamento (n)

É determinado em função da tensão de escoamento e de sua correspondente deformação, estando vinculado à capacidade de deformação por estiramento.

Em materiais cujo o valor de *n* é alto, a tensão de escoamento cresce rapidamente com a deformação. Este efeito – o encruamento – ocorre na região plástica de deformação de um metal, representando um aumento da tensão cisalhante limite, à medida que cresce a deformação plástica. É causado pela interação entre discordâncias, umas com as outras, ou também com barreiras que impedem seu movimento através da rede cristalina, sendo o encruamento de metais com grãos finos, maior do que o de um agregado cristalino com grãos grosseiros. Essa interação faz com que a distribuição de deformações tenda às regiões com deformação e tensão de escoamento menores [DIETER,1981].

Um grande valor de *n* indica uma boa conformabilidade. Em uma região com alongamento uniforme, *n* é definido como sendo:

$$n = \frac{d\,ln\,\sigma_v}{d\,ln\,\varepsilon}, \tag{2.3}$$

onde σ_v é a tensão verdadeira e ε é a deformação verdadeira.

A curva tensão-deformação verdadeira do material, obtida pela equação 2.3, pode ser aproximada pela relação constitutiva 2.4, conhecida como equação de Hollomon, que será melhor discutida no capítulo seguinte [WAGONER, 1997].

$$\sigma_v = k\varepsilon^n \quad , \tag{2.4}$$

sendo n o expoente de encruamento e k o coeficiente de resistência.

Daí deriva-se o nome "coeficiente de encruamento". Essa equação constitutiva é uma boa aproximação para a maioria dos aços, embora não o seja para alguns alumínios e aços de duas fases. Nestes casos, devem ser tomados dois ou três valores de *n* em localizações onde ocorram diferentes deformações.

2.3.2.2 Coeficiente de Sensibilidade da Tensão de Escoamento à Velocidade de Deformação (m)

Quando um material se deforma, a maior parte da energia cedida a ele transforma-se em calor. Quanto maior a velocidade de deformação, menor o tempo para que o calor se dissipe, e, então, maior será a temperatura do material após a deformação. Nas deformações a quente este problema tem uma particular importância, pois caso a temperatura inicial já seja alta, há o risco de que o aumento desta temperatura provoque a fusão do metal. A sensibilidade à taxa de deformação dos metais é bem baixa à temperatura ambiente, aumentando com a temperatura, especialmente para temperaturas acima da metade do ponto absoluto de fusão. As ligas e metais superplásticos têm a característica de apresentar elevado coeficiente de sensibilidade. Nestes materiais fica evidente que as grandes elongações estão ligadas a não formação de estricções, ou empescoçamentos [NEWBY,1978].

O coeficiente *m* é função da velocidade de deformação – $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ou $\dot{\varepsilon}$ – , e da tensão verdadeira, σ_v, e é definido por:

$$m = \frac{d \ln \sigma_v}{d \ln \dot{\varepsilon}} \tag{2.5}$$

Esta definição também implica uma equação constitutiva, que incorpora a equação 3.45, apresentada no terceiro capítulo, tomando a seguinte forma:

$$\sigma_v = \mathrm{k} \cdot \varepsilon^n \cdot \dot{\varepsilon}^m = \mathrm{f}(\varepsilon) \cdot \dot{\varepsilon}^m \tag{2.6}$$

Quando o coeficiente de sensibilidade, *m*, é positivo, ele indica que a tensão de escoamento cresce com a velocidade de deformação. Isto tem duas conseqüências. A primeira é que conformações com altas velocidades de deformação exigem tensões altas. A segunda conseqüência é que num processo de conformação, o material resiste mais à deformação nas regiões que estão sendo deformadas rapidamente do que nas regiões adjacentes; isto devido ao acréscimo da tensão de escoamento naquelas regiões. Estes fenômenos fazem com que as deformações se distribuam mais uniformemente.

A necessidade de altas-tensões, num processo de conformação, não é o principal fator a se considerar. A capacidade de distribuir deformações, todavia, pode ser um ponto crucial do processo. Deformações mal distribuídas vêm a ser um grave problema, gerando problemas tais como as orelhas e as estricções.

Altos valores de *n* e *m* geram bons resultados nas operações de tração, porém numa operação de estampagem, têm pequeno efeito. Isto se dá, pois, com os coeficientes *n* e *m* altos, a parede do copo estampado torna-se mais resistente, evitando fraturas na peça, embora, por outro lado, a aba da chapa também fique mais rígida, diminuindo as condições que cooperam com a estampagem.

2.3.2.3 Fator de Anisotropia ou Taxa de Deformação Plástica (r)

O fator de anisotropia está intrinsecamente relacionado à estampabilidade. É definido como sendo a razão entre a deformação verdadeira na largura, ε_l, e a deformação verdadeira na espessura, ε_e, na região de alongamento uniforme, no ensaio de tração.

$$r = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_e} \tag{2.7}$$

O valor de *r* é a medida da habilidade do material de resistir ao afinamento. Um alto valor de *r* indica um material bom para a estampagem. O fator de anisotropia freqüentemente muda nas diferentes direções da chapa. Em uma operação de estampagem de um copo cilíndrico, essa mudança causa uma variação na altura da parede do copo, gerando o fenômeno conhecido como orelha. Em conseqüência disto, é comum medir-se um valor médio de *r*, conhecido como anisotropia média normal, $\bar{r}$, e, também, o valor conhecido como anisotropia planar, Δr, que é uma medida da variação de *r* com cada direção, no plano da chapa, e que, num material isotrópico, é zero [TAYLOR,1988].

A propriedade $\bar{r}$ é definida através da seguinte equação:

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \tag{2.8}$$

Já o valor de Δr é definido como:

$$\Delta r = \frac{r_0 - 2r_{45} + r_{90}}{2}. \tag{2.9}$$

onde os subscritos referem-se ao ângulo entre o eixo de tração e a direção rotacionada de medição de *r* , no plano da chapa.

O valor $\bar{r}$ determina a profundidade média – a altura da parede do copo – no local da mais profunda estampagem possível. O valor Δr determina a extensão das orelhas. Uma combinação de um alto valor da anisotropia média normal combinado com um baixo valor da anisotropia planar cooperam para uma ótima estampagem.

Os maiores valores de $\bar{r}$ são encontrados nos aços livres-de-interstícios, ficando entre *1,8* e *2,5*. O máximo teórico calculado para um aço ferrítico foi *3,0* , enquanto o máximo medido foi *2,8* .

2.3.3 Limites de Conformação

Trataremos agora dos limites máximos de deformação que pode um metal suportar com segurança e de como obtê-los.

2.3.3.1 Acerca do Diagrama Limite de Conformação

O Diagrama Limite de Conformação, ou Curva Limite de Conformação, indica o limite máximo operacional de deformação que uma superfície metálica pode suportar antes que venha a sofrer estricção com conseqüente fratura. Este limite depende da combinação das deformações principais impostas, que são, no plano, a deformação máxima e a mínima. Tais deformações são representadas num gráfico onde a abscissa representa a menor deformação, sendo positiva no caso de alongamento e negativa no encurtamento; as deformações máximas são representadas no eixo das ordenadas.

Os diversos valores medidos de deformação máxima são obtidos no início da estricção. Cada qual é representado em par ordenado com sua correspondente deformação mínima. O Diagrama Limite de Conformação deve ser sempre obtido antes de qualquer operação. É usado em combinação com medidas de deformação, normalmente obtidas das grades de círculos. Se os pontos que representam os pares ordenados de deformação máxima medida se localizarem, no gráfico, muito próximos

ou acima da curva limite, é sinal de que existem problemas. Podem ser problemas na ferramenta, na lubrificação, no posicionamento, ou ainda podem advir de outras tantas variáveis. Por vezes, isso se dá mesmo sem a ocorrência prévia de estricções ou fraturas, porém deve-se ter o mesmo cuidado, visto que há bastante flutuação nas condições de operação e nas propriedades do metal. Quando for constatado esse problema no diagrama, deve-se mudar algumas variáveis, até que se consiga pontos a uma distância segura, abaixo da curva limite.

Para muitos aços baixo-carbono o diagrama limite de conformação tem uma forma semelhante à mostrada na figura a seguir, porém a posição vertical da curva depende da espessura da chapa e do expoente de encruamento, *n*. O ponto de cruzamento da curva com o eixo vertical, que é um ponto de deformação plana e também o ponto de mínimo da curva, tem um valor igual a *n*, no limite da espessura tendendo a zero.

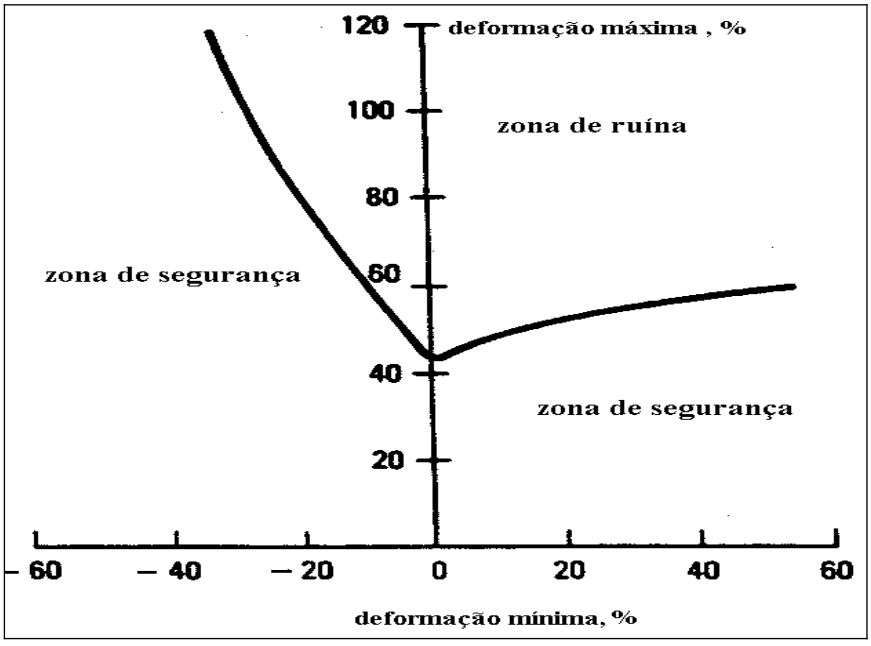


Figura 2.15 – Zonas operacionais de um Diagrama Limite de Conformação típico de aços [TAYLOR,1988].

Caso a deformação máxima medida esteja seguramente abaixo da curva e, ainda assim haja estricções ou fraturas, há grande possibilidade de que o lote do material esteja fora de padrão.

A figura 2.16 mostra onde ocorrem no gráfico, os problemas mais comuns da conformação:

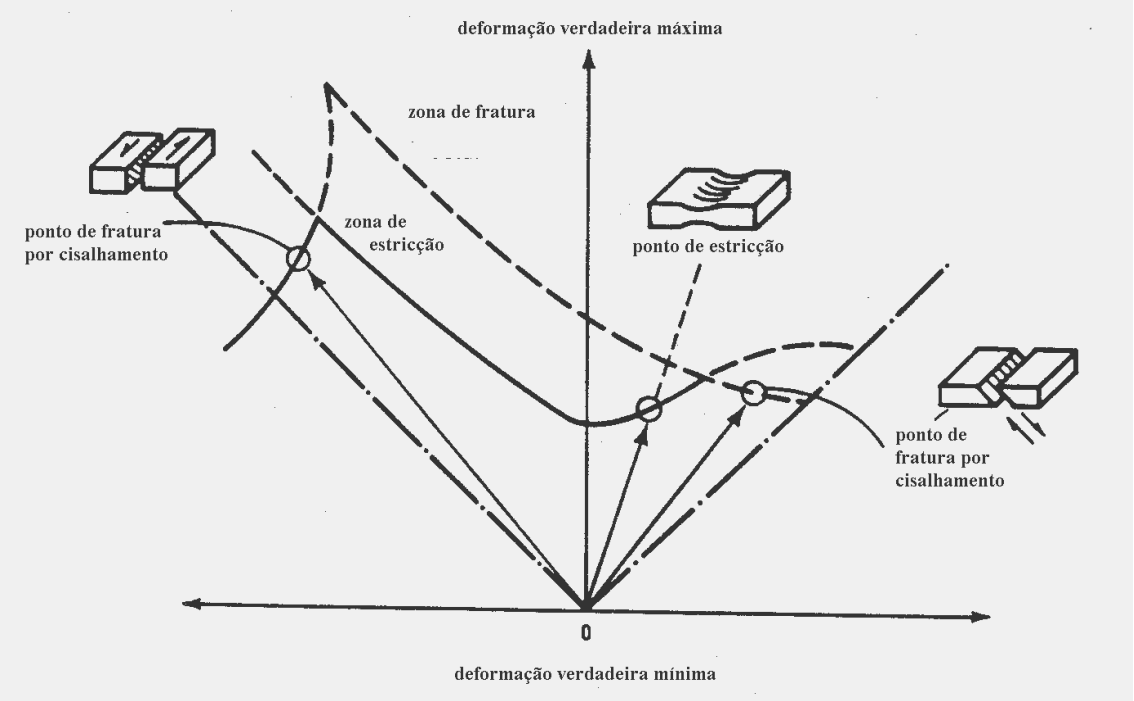


Figura 2.16: Lugar geométrico dos problemas de uma operação de conformação [TAYLOR,1988].

2.3.3.2 Ensaios para Determinação do Diagrama Limite de Conformação

Dos principais testes de laboratório, dois são os mais usados para se determinar o Diagrama Limite de Deformação.

O primeiro tipo envolve um corpo-de-prova de um teste de estiramento além de um punção – por exemplo, um punção hemisférico. Este tipo de teste produz algumas deformações fora do plano, havendo também efeitos devidos ao atrito.

O segundo teste produz somente deformações no plano e não envolve nenhum contato com o corpo-de-prova dentro da área de medição.

O primeiro tipo de teste é o mais usado e dá algumas diferenças de resultados. Boas correlações têm sido obtidas entre os Diagramas Limite de Conformação determinados em laboratório e a produção experimental.

O chamado Método do Punção Hemisférico, teste do primeiro tipo, utiliza-se da grade de círculos, exposta anteriormente. O corpo-de-prova é preso por um anel fixador e tracionado por um punção de aço. As deformações são medidas e a Curva Limite de Deformação é então desenhada, passando por cima daqueles pontos que representam as regiões onde não houveram estricções ou fraturas e abaixo daqueles outros pontos medidos nas regiões onde ocorreram problemas, conforme mostrado no seguinte gráfico, que representa teste realizado com chapa de aço-acalmado-com-alumínio.

O Diagrama Limite de Conformação de uma liga de alumínio será utilizado ao fim deste trabalho para avaliar os resultados da modelagem da estampagem profunda.

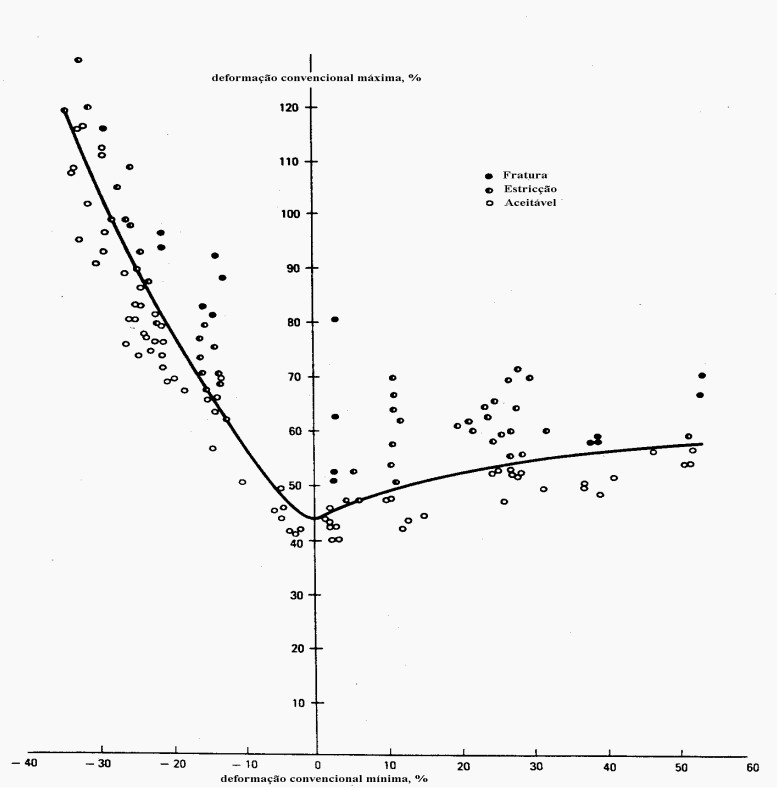


Figura 2.17 – Medidas de deformação e Diagrama Limite de Conformação para aço acalmado com Alumínio [TAYLOR,1988].

O Método da Determinação no Plano pode ser realizado efetuando-se os ensaios de tração uniaxial, de tração de chapa retangular, ou de estiramento biaxial de Marciniak, com punções elípticos e circulares. A curva limite de deformação pode então ser determinada diretamente das medições das deformações principais, sem que haja a necessidade de introduzir qualquer deformação fora de plano.

Capítulo 3

Da Mecânica dos Sólidos Deformáveis

Neste capítulo serão introduzidas noções fundamentais da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, parte da Mecânica do Meio Contínuo, cuja teoria foi uma das primeiras a serem discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos. Usar-se-á, para tanto, a concisa notação tensorial. Não houve preocupação em apresentar demonstrações matemáticas, visto não ser este o escopo deste trabalho, cujo tema se prende à apresentação geral da teoria e da prática envolvidas nos processos de modelagem computacional de sólidos deformáveis. Tais demonstrações, quando necessário, poderão ser obtidas facilmente em bons livros acerca dessa teoria, alguns, inclusive, apresentados na bibliografia ao final da dissertação.

3.1 Considerações Gerais

A Física macroscópica é aquela cujas hipóteses admitem continuidade da matéria. Esta premissa é válida exceto quando a análise considera a estrutura molecular da matéria e, por conseguinte, os seus vazios intersticiais. Isto resulta em uma concepção homogênea do corpo em estudo, como no caso da mecânica do meio contínuo. Num meio contínuo clássico, os pontos materiais possuem tão somente três graus de liberdade, a saber, as componentes do vetor posição num referencial qualquer,

como os pontos da mecânica newtoniana. Há, todavia, outras hipóteses de meios contínuos, denominadas polares, como as propostas pelos irmãos *Cosserat*, nas quais existem mais graus de liberdade. Neste trabalho, contudo, adotaremos o conceito clássico de meio contínuo [PIMENTA, 1994].

Há duas grandes frentes de estudo abordadas pela Mecânica do Contínuo, a saber, a Mecânica dos Fluidos e a Mecânica dos Sólidos. Esta última divide-se em Mecânica dos Sólidos Rígidos e Mecânica dos Sólidos Deformáveis. Por sua vez, a análise dos sólidos deformáveis pode adotar diferentes premissas ditas reológicas, ou ainda, relações constitutivas. A reologia é o campo da Física que estuda as relações entre os esforços internos e as suas correspondentes deformações no tempo, formulando modelos de comportamento de materiais, que resultam em teorias tais como a da Elasticidade, da Plasticidade, da Visco-Elasticidade, entre outras tantas combinações de hipóteses possíveis [ZAGOTTIS, 1982].

Neste presente estudo será utilizada a teoria da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, visto que o problema a ser tratado envolve a definição das características geométricas e mecânicas de um sólido que resiste, se deforma, ou mesmo fratura diante de determinados esforços. É, portanto, primordial a consideração da deformação e dos esforços internos do sólido, que definem o seu comportamento. A hipótese reológica usada para simular o comportamento real dos sólidos, neste trabalho, considera o material como sendo elasto-plástico.

O tratamento generalista e unificado, obtido pela Mecânica do Contínuo, nos permite uma visão ampla de conjunto, podendo abranger diversas hipóteses variadas sobre o comportamento de um corpo teoricamente contínuo, conforme a premissa macrofísica. De modo abrangente e geral, tal teoria proporciona o estudo dos deslocamentos, tensões e deformações, bem como de seus respectivos fluxos, nos meios sólidos, líquidos e gasosos. Nesse sentido a Mecânica do Meio Contínuo é importante ferramenta para se pesquisar comportamentos estruturais, sendo também útil na termodinâmica, no eletromagnetismo e na caracterização de equações constitutivas de materiais novos ou que ainda não foram bem definidos.

3.2 Ponto Material e Massa Específica

Segundo as hipóteses da Mecânica do Contínuo, ao se assumir que um meio contínuo ocupa um certo volume em um dado instante de tempo, entende-se que cada porção infinitesimal deste volume é preenchida por uma porção infinitesimal de massa. Surge, então, a noção de ponto material, cuja posição é espacialmente descrita em cada instante, através de coordenadas num determinado sistema. O ponto material do contínuo é também nomeado partícula, visando uma diferenciação daquilo que se chama apenas ponto – um lugar fixo no espaço [MASE, 1970].

Através da hipótese da continuidade, define-se o conceito de densidade – ou massa específica – ρ, associada num instante *t*, à uma partícula *P.* Pode-se escrever este conceito segundo a concepção de espaço pontual da geometria euclidiana, utilizando-se da noção de limite da seguinte forma:

$$\rho(P) = \lim_{V(P)\to 0} \frac{m(P)}{V(P)} \tag{3.1}$$

onde *V(P)* é o volume da partícula *P*, de massa *m*.

Pode-se, pois, escrever:

$$dm = \rho\, dV \tag{3.2}$$

sendo que dV é um elemento de volume, contendo *dm*, um elemento de massa.

3.3 Estudo das Deformações

Os corpos contínuos podem ser entendidos como um conjunto de partículas contínuas e infinitesimais. Os movimentos de cada qual deste ínfimos componentes descrevem o movimento do corpo como um todo, em relação a um certo referencial, em sucessivos instantes de tempo.

Os pontos materiais podem ser postos em correspondência bijetiva com os pontos de uma região do espaço euclidiano, sendo que esta bijetividade exclui a possibilidade de fissão, bem como a de fusão das partículas [COIMBRA, 1981].

3.3.1 Descrições do Movimento

Indicaremos por x a posição do espaço ocupada pela partícula, no momento da análise; X designará a posição inicial – instante t_o – deste mesmo ponto material, estando o corpo na configuração de referência, normalmente coincidente com a indeformada [MASE,1970], conforme observamos na ilustração a seguir:

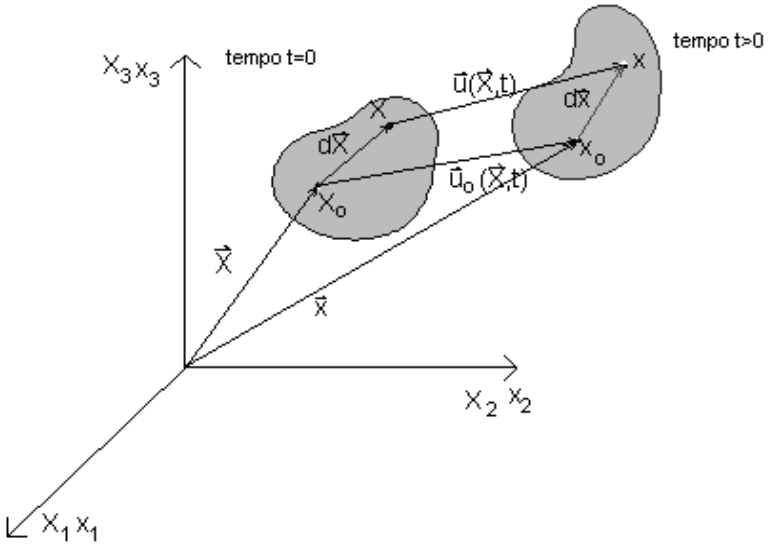


Figura 3.1 – Descrições do movimento nas configurações de referência e atual.

Segundo a descrição lagrangeana, também conhecida como material, o movimento é descrito em função das coordenadas iniciais da partícula. Desta forma, pode-se determinar a posição atualmente ocupada através da relação:

$$x = x(X,t) \tag{3.3}$$

Já na descrição euleriana, ou espacial, o movimento é expresso através das coordenadas atualmente ocupadas pelo ponto material, de modo inverso ao anterior:

$$X = X(x,t) \tag{3.4}$$

A relação entre os dois modos de descrever o movimento se dá através do tensor gradiente das transformações, **F**, ou gradiente das deformações materiais. Esta relação é expressa da seguinte forma, conforme a descrição lagrangeana:

$$dx = \mathbf{F}\, dX \tag{3.5}$$

onde **F** é a quantidade fundamental que descreve localmente a deformação de um sólido e pode ser escrito através da seguinte operação de multiplicação tensorial entre vetores:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{x}_1}{\partial \mathrm{X}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Para que a inversão entre as descrições apresentadas seja possível e, portanto, para que na transformação o sólido não se penetre, é necessária e suficiente a condição que afirma que o jacobiano da transformação **J** – ou seja, o determinante do gradiente das transformações, det(**F**) – deve ser positivo em qualquer ponto do sólido na configuração de referência. Tal condição é conhecida como condição local de impenetrabilidade. Podemos escrevê-la como se segue:

$$\mathbf{J} = |\,\mathbf{F}\,| = det\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X}\right] = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} > 0 \qquad (3.7)$$

A análise dos significados físicos de cada qual das descrições, permite concluir que a lagrangeana fixa a atenção em partículas específicas – tomando uma determinada propriedade do continuo, descreve a sua evolução, analisando a trajetória das partículas que a transportam. Já a descrição euleriana, concentra-se num ponto do espaço ocupado pelo contínuo, onde, dada uma propriedade qualquer, descreve a sua evolução no tempo naquele ponto observado. Tem sido, portanto, a descrição do movimento lagrangeana normalmente preferida para se analisar os princípios básicos da mecânica e estudar as deformações de sólidos, cujos deslocamentos são mais fáceis de serem seguidos do que no caso de líquidos ou gases. A descrição espacial é preferida no estudo de fluidos passando por uma região determinada [COIMBRA, 1981].

Outro importante tensor, relativo às deformações, é conhecido como tensor das deformações de Green:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) \qquad (3.8)$$

onde **I** é o tensor identidade, definido como:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Os componentes da diagonal principal do tensor das deformações de Green são, nas respectivas direções, aproximadamente iguais às deformações convencionais apresentadas na equação 2.1 [WAGONER, 1997].

A diferenciação do tensor de Green no tempo permite que cheguemos ao tensor das taxas de deformação de Green :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right) \tag{3.10}$$

3.3.2 Deslocamento, Velocidade e Aceleração

A expressão do deslocamento u , segundo a descrição material, é apresentada a seguir:

$$x = X + u(X,t) \tag{3.11}$$

Ao campo tensorial **L** definido por

$$\mathbf{L} = grad\,\vec{u} = \nabla\,\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial \mathrm{X}_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

dá-se o nome de gradiente dos deslocamentos materiais. Com esta definição, expressa-se as componentes de deslocamento de um elemento infinitesimal do sólido em questão [MASE, 1970].

A partir das definições, chegamos também à seguinte expressão decorrente:

$$\mathbf{L} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \tag{3.13}$$

O tensor das deformações de Green , **E** , apresentado anteriormente, pode ser escrito em termos do gradiente dos deslocamentos materiais, tomando a seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^T\mathbf{L}) \tag{3.14}$$

Em casos de linearidade geométrica – pequenas deformações – o valor das componentes do gradiente dos deslocamentos, **L** , é bastante pequeno, sendo, pois, desprezíveis, as componentes do produto $\mathbf{L}^T\,\mathbf{L}$. Daí, define-se o chamado tensor das deformações infinitesimais:

$$\widetilde{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \tag{3.15}$$

Apesar de não estarmos tratando de problemas com linearidade geométrica, o tensor das deformações infinitesimais ser-nos-á importante no estabelecimento do Princípio dos Trabalhos Virtuais na configuração instantânea, por ser energeticamente conjugado com o tensor das tensões de Cauchy, Σ, conforme será explicitado adiante.

Neste ponto, apresentamos, então, as definições da velocidade e da aceleração para pontos materiais. Na configuração deformada são obtidas pela derivação no tempo do vetor posição x, ou seja $X+u$, respectivamente uma e duas vezes. Usando o deslocamento expresso na forma lagrangeana, $u = u(X,t)$, com X constante no tempo, temos que as expressões que descrevem a velocidade e a aceleração materiais, ou seja, para um ponto material – utiliza-se aqui o conceito de derivada material, apresentado detalhadamente mais adiante, neste mesmo capítulo –, são respectivamente as seguintes [MASE, 1970] :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(u+X)}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{\vec{u}} \tag{3.16}$$

e analogamente,

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{dv(X,t)}{dt} = \frac{\partial v(X,t)}{\partial t} = \ddot{u} \tag{3.17}$$

Um outro tensor de importância, ora apresentado na descrição lagrangeana, é o chamado gradiente do campo de velocidades, dado pelo seguinte campo tensorial [PIMENTA, 1994]:

$$\mathbf{V} = grad\, v = \nabla \dot{u} = \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial \mathrm{X}_1} & \frac{\partial v_1}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial X_1} & \frac{\partial v_2}{\partial X_2} & \frac{\partial v_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial X_1} & \frac{\partial v_3}{\partial X_2} & \frac{\partial v_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Este tensor pode ser separado em duas parcelas, sendo a primeira simétrica, representando a taxa de elongação, enquanto que a outra é anti-simétrica e representa a taxa de rotação, respectivamente, como segue:

$$\mathbf{V} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \tag{3.19}$$

onde **D** é o tensor taxa de deformação e **W** é o tensor de vorticidade.

Daí pode-se observar que, num dado ponto e tempo, o movimento de uma partícula de um corpo pode ser decomposto num movimento de deformação irrotacional e numa rotação rígida, podendo ainda sofrer uma translação [COIMBRA, 1981].

Nos casos de serem consideradas pequenas deformações, pode-se afirmar que:

$$\dot{\tilde{\mathrm{E}}} = \mathbf{D} \tag{3.20}$$

onde $\dot{\tilde{\mathrm{E}}}$ é a derivada no tempo do Tensor das Deformações Infinitesimais.

Este resultado terá utilidade direta na formulação do Princípio dos Trabalhos Virtuais na configuração instantânea, como será visto no decorrer desta dissertação.

3.4 O Conceito de Tensão

O conceito de tensão num ponto é essencial no estabelecimento da Mecânica do Contínuo. Consideremos uma seção transversal S de um sólido sujeito à um carregamento genérico. Seja também considerado um ponto Q desta seção e uma ínfima porção de área ΔS ao seu redor, como no desenho abaixo:

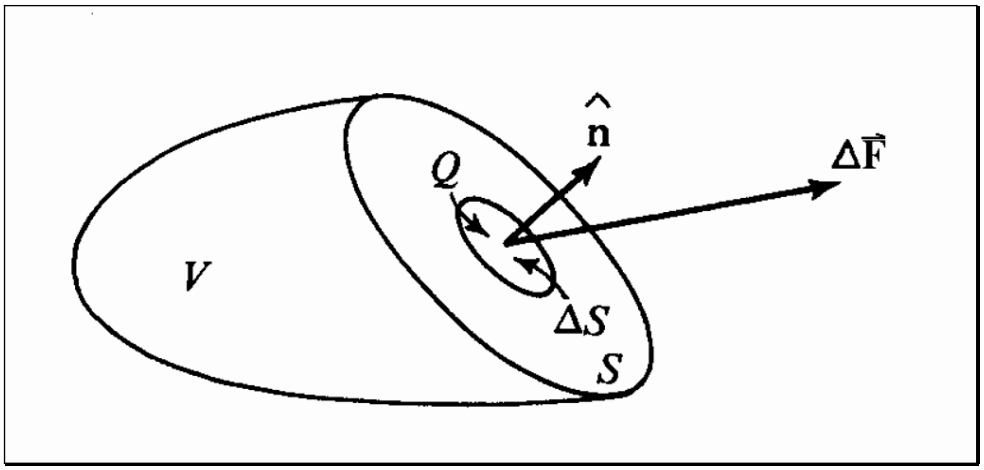


Figura 3.2 – Seção transversal de um sólido V.

A definição do vetor tensão, ou vetor força superficial por unidade de área, $t^{(\hat{n})}$, pode, pois, ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{t}^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \tag{3.21}$$

onde ΔS é a superfície infinitesimal em torno do ponto Q, definida segundo $\hat{n}$, versor normal a ela, e ΔF é o vetor resultante das ações do restante do corpo sobre ΔS.

O estado de tensão num ponto é caracterizado pela totalidade de cada qual dos vetores tensão deste ponto. Como se pode tomar infinitas seções através de um ponto – caracterizadas por infinitos versores $\hat{n}$ – são também infinitos os valores do vetor de

tensão, que variam segundo as infinitas superfícies que podem ser tomadas. Porém, para que se caracterize o estado de tensão de um ponto não é necessário que se conheça os valores de todos os vetores de tensão, em cada um dos planos que podem seccioná-lo.

Demonstra-se que qualquer estado de tensão pode ser expresso segundo três planos, cujas normais sejam linearmente independentes entre si.

Essa proposição é conhecida como teorema de Cauchy, e expressa segundo a relação que se segue:

$$t^{(\hat{n})} = \Sigma\, \hat{n} \tag{3.22}$$

sendo Σ um tensor simétrico, conhecido como tensor das tensões de Cauchy, que é escrito em um determinado sistema de coordenadas e que define o estado de tensões instantâneo do ponto, ou seja, na configuração atual [PIMENTA, 1994].

O tensor das tensões de Cauchy pode ser assim expresso, segundo suas componentes relativas a uma determinada base de coordenadas:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

O significado físico de cada componente do Tensor das Tensões de Cauchy, de modo bastante claro, pode ser visualizado na representação a seguir, que mostra as componentes do tensor, através de sua decomposição, numa base ortonormal :

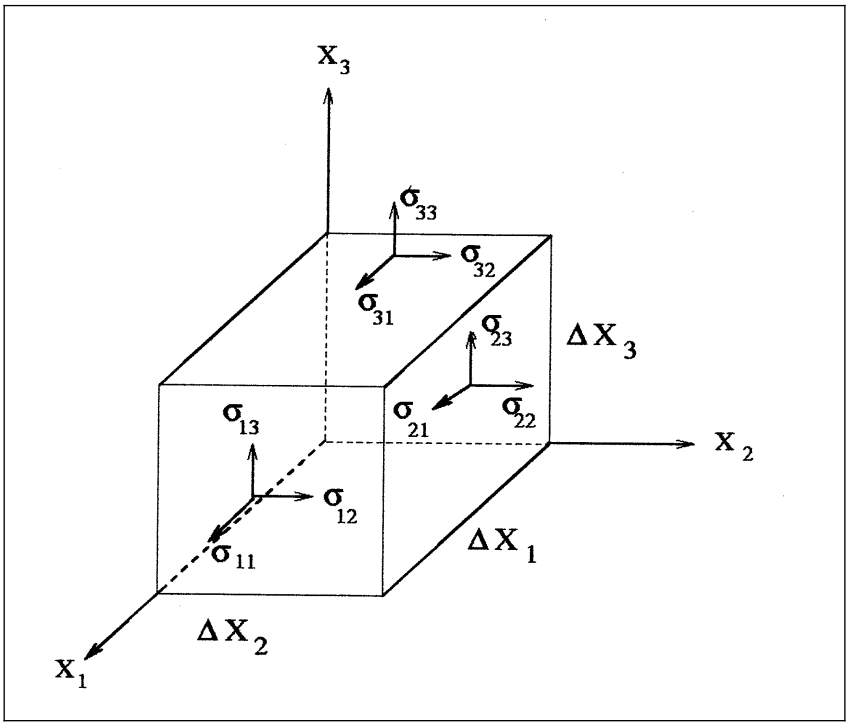


Figura 3.3 – Representação física dos componentes do tensor das tensões.

Pode-se escrever o vetor tensão na configuração de referência, a qual freqüentemente coincide com a configuração indeformada, facilitando tal descrição:

$$t_0 dS_0 = t\, dS \tag{3.24}$$

onde dS_0 *e* dS são os elementos infinitesimais de superfície, cujos versores são dados por $\hat{n}_0$ e $\hat{n}$, respectivamente nas configurações de referência e atual.

Assim como as deformações podem ser tratadas sob diferentes pontos de vista – descrições lagrangeana e euleriana – , também as tensões podem ser tomadas sob diferentes enfoques, tais como através da utilização dos tensores das tensões de Piola-Kirchhoff [WAGONER, 1997].

Na ilustração abaixo, a idéia básica destes dois tensores pode ser imaginada através da aplicação dos vetores força, ΔF e $\Delta\tilde{F}$, no elemento de área da configuração de referência, assim como a idéia do Tensor de Cauchy está indicada pela aplicação do vetor força ΔF no elemento de área da configuração atual. A significação física dos tensores de Piola-Kirchhoff é bastante abstrata, contudo seu valor no desenvolvimento desta teoria é amplo.

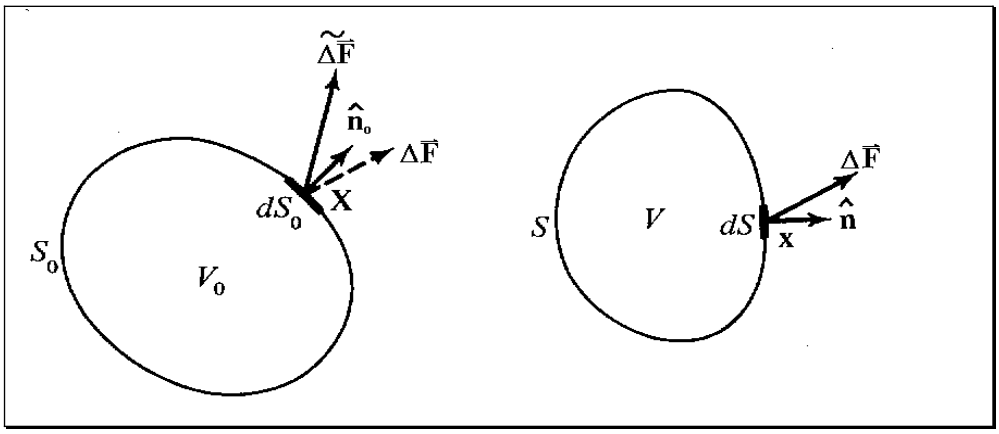


Figura 2.4 — Configurações: de referência (esquerda) e atual (direita) [Malvern,1969].

O Primeiro Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff é um tensor não-simétrico, assim definido:

$$\mathbf{P} = det(\mathbf{F})\,\Sigma\,\mathbf{F}^{-T} \tag{3.25}$$

onde o símbolo sobrescrito ($-T$), indica as operações comutáveis de transposição (T) e de inversão (-1).

A figura 2.4 permite uma possível interpretação do abstrato tensor **P** ; num plano, a força no instante atual, ΔF (vetor tracejado), age num elemento de área da configuração de origem, dS_0 [MALVERN, 1969].

Outro importante modo de se analisar as tensões, dá-se por meio do tensor simétrico conhecido na literatura como o Segundo Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff [PIMENTA, 1994]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = det(\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-1}\Sigma\,\mathbf{F}^{-T} \tag{3.26}$$

Também na figura 2.4, pode-se imaginar uma interpretação física para o tensor das tensões **S** ; nela, pode-se visualizar a força no instante de origem, $\Delta\widetilde{F}$, agindo num elemento de área da configuração de origem, dS_0 [MALVERN, 1969].

3.5 Leis Fundamentais da Mecânica do Meio Contínuo

A partir dos conceitos básicos apresentados, bem como de conceitos primitivos– massa, força, energia interna e taxa de transferência de calor – e utilizando também alguns fundamentos matemáticos, podemos então formular as leis fundamentais da Mecânica do Meio Contínuo. Dos balanços de massa, de quantidade de movimento – linear e angular – e de energia resultam as equações de campo definidas em uma configuração do contínuo, na região considerada do espaço euclidiano. Neste trabalho foi apresentado apenas um sumário dos fundamentos matemáticos, bem como dos princípios fundamentais. Para uma apreciação mais profunda pode-se recorrer à literatura física-matemática mais específica.

3.5.1. Fundamentos Matemáticos

Para se que se equacione as leis básicas da Mecânica do Contínuo é preciso o conhecimento de alguns teoremas e ferramentas matemáticas. Apresentar-se-á

brevemente esta matemática fundamental e, em seguida, as leis fundamentais que regem esta ampla mecânica.

3.5.1.1 Derivada Material

Algumas vezes tem-se a necessidade de calcular derivadas de campos descritos por coordenadas espaciais, todavia mantendo-se fixa a posição da partícula na configuração de referência. Então faz-se uso da operação conhecida como derivada material, ou substantiva – uma derivada total que mede a taxa de variação no tempo de uma grandeza escalar, vetorial ou tensorial numa determinada partícula.

Seja ϕ um campo escalar que designa alguma propriedade da partícula, expresso na descrição euleriana. Derivando no tempo, temos a derivada material de ϕ:

$$\frac{d\phi}{dt}(\vec{x},t) = \dot{\phi}(\vec{x},t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x},t) \cdot \dot{\vec{x}}(\vec{x},t) \tag{3.27}$$

3.5.1.2 Teoremas Matemáticos

i) *Teorema da Divergência* ***:***

Este teorema do cálculo fundamental é amplamente usado no desenvolvimento da Mecânica do Contínuo. Pode ser aplicado desde as grandezas escalares até as grandezas tensoriais; sua generalização é também conhecida como teorema de Ostrogradski [WAGONER, 1997], ou como teorema de Gauss [GURTIN, 1981].

Aqui será apresentada, primeiramente, uma generalização para o plano da regra da integração por partes de integrais simples, expressão conhecida como teorema de Green.

Seja Ω um domínio finito com contorno $\partial\Omega$, onde f e g são duas funções escalares definidas em Ω. Então, para qualquer grupo de coordenadas $\boldsymbol{x}_k$ (k =*1, 2,* ou *3*) correspondente ao vetor de posição x, temos:

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_k} dV = \int_{\partial\Omega} fg\, \hat{n}_k \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_k} g \, dV \tag{3.28}$$

onde $\hat{n}_k$ é o versor normal ao contorno, com componentes n_1, n_2 e n_3 (k= 1, 2 e 3).

Este teorema pode também ser enunciado da seguinte forma, válida para escalares, vetores e tensores:

Seja Ω um domínio finito do espaço pontual euclidiano, com contorno $\partial\Omega$ regular. Sejam, ainda, os campos regulares $\phi, v, \mathbf{T}$ – respectivamente escalar, vetorial e tensorial. Sendo $\hat{n}$ o versor normal ao contorno $\partial\Omega$ num ponto qualquer, valem, pois, as relações que se seguem:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \phi \hat{n} \, d\partial\Omega = \int_{\Omega} \nabla\phi \, d\,\Omega \\
&\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \hat{n} \, d\partial\Omega = \int_{\Omega} div\, \vec{v} \, d\,\Omega \\
&\int_{\partial\Omega} \mathbf{T}\hat{n} \, d\partial\Omega = \int_{\Omega} div\mathbf{T} \, d\,\Omega
\end{aligned}$$

(3.29)

Nos desenvolvimentos que seguem, interessa também a seguinte relação :

$$div(\mathbf{T}^T v) = \mathbf{T}\cdot\nabla v + div\mathbf{T}\cdot v \tag{3.30}$$

ii) *Teorema da Condição Necessária e Suficiente para Integral Nula*

Se uma função f é definida num domínio Ω, e se para todo sub-domínio possível W de Ω se tem:

$$\int_W f \, \mathrm{d}V = 0 \tag{3.31}$$

e, então, a função f deve ser igual a zero em todo o domínio W, para que a integral seja nula.

3.5.2 Princípios Fundamentais

Nesta parte do trabalho, é oferecida uma visão geral e resumida dos princípios fundamentais que regem a Mecânica do Meio Contínuo, apresentando-se, por fim, as equações básicas que regem a análise de um contínuo. Estas, por sua vez permitem a discretização pelo Método dos Elementos Finitos e a posterior implementação do método em programas práticos, como o programa alvo deste estudo.

3.5.2.1 Conservação da Massa: A Equação da Continuidade

Consoante a hipótese da mecânica do contínuo, a massa é uma propriedade que está associada a todo material contínuo, independente do tempo ou das dimensões que o corpo possa ter.

A quantidade de massa em uma porção do contínuo que ocupa o volume V, no tempo t é dada pela seguinte integral:

$$m = \int_V \rho(x,t)\, dV \tag{3.32}$$

onde $\rho(x,t)$ é a densidade, uma função contínua em V.

A lei de conservação de massa diz que certa massa de uma porção específica do contínuo permanece sempre constante – não se cria ou perde massa – e, portanto, sua derivada material é nula. Podemos escrever a taxa de variação de massa da seguinte forma:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho(\vec{x},t)\, dV = 0 \tag{3.33}$$

Conforme podemos perceber, esta equação vale para um volume arbitrário, podendo ser expressa, de modo geral, por:

$$\frac{d\rho}{dt} + div(\rho \vec{\dot{x}}) = 0 \tag{3.34}$$

sendo $\dot{x}$ a velocidade. Esta equação é conhecida como equação da continuidade.

3.5.2.2 Conservação do Momento Linear: As Equações do Movimento

O momento linear P, ou quantidade de movimento linear de um contínuo, ocupando um volume V, é, por definição:

$$P(t) = \int_V \rho\dot{x}\, dV \tag{3.35}$$

O princípio do momento linear, conforme a segunda lei de Newton, afirma que a taxa de variação no tempo do momento linear, em uma porção do contínuo, é igual a resultante das forças agindo na porção considerada. Sendo que as forças internas obedeçam à terceira lei de Newton – da ação e reação – temos que este princípio pode ser assim expresso:

$$\int_S \vec{t}^{(\hat{n})} dS + \int_V \vec{b} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{\vec{x}} \, dV \tag{3.36}$$

onde $t^{(\hat{n})}$ é o vetor das tensões já apresentado e b são as forças de campo. O primeiro termo representa as forças atuantes por contato e, o segundo termo, as forças agindo à distância – as forças de campo.

Usando o teorema da divergência – supondo uma porção do contínuo com superfície regular – temos então:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{\vec{x}} \, dV = \int_V div(\Sigma) \, dV + \int_V b \, dV \tag{3.37}$$

Esta integral deve ser válida para um volume V qualquer, arbitrário – admitindo-se que não haja fluxo de massa durante o movimento. Desta forma desaparece a integral, dando lugar à seguinte formulação vetorial da equação do movimento, escrita na descrição espacial:

$$\rho \ddot{x} = div(\Sigma) + b \tag{3.38}$$

Há um caso particular bastante importante, que é aquele cuja aceleração do corpo é nula e, portanto há equilíbrio entre as forças – problemas ditos estáticos. Já os problemas nos quais os efeitos dinâmicos podem ser negligenciados, desprezando-se a

pequena aceleração; são chamados de "*quasi-estáticos*". Em ambos estes casos, a equação do movimento se reduz à:

$$div(\Sigma) + b = 0 \tag{3.39}$$

3.5.2.3 Conservação do Momento Angular: A Simetria do Tensor das Tensões

A quantidade de movimento angular *N*, também conhecida como torque, é definida por:

$$N(t) = \int_V (x \wedge \rho \dot{x})\, dV \tag{3.40}$$

O princípio do momento angular estabelece que a derivada no tempo da quantidade de movimento angular de uma porção qualquer do contínuo, em relação a um determinado ponto arbitrário, é igual ao torque resultante – em relação ao mesmo ponto arbitrário – das forças de superfície e de campo que estão agindo nessa mesma porção do contínuo.

Em sua forma integral, o princípio do momento angular pode ser assim expresso:

$$\int_S (\vec{x} \wedge \vec{t}^{(\hat{n})})\, dS + \int_V (\vec{x} \wedge \vec{b})\, dV = \frac{d}{dt}\int_V (\vec{x} \wedge \rho \vec{\dot{x}})\, dV \tag{3.41}$$

Este princípio não nos fornece nenhuma nova equação do movimento. Porém, em se aplicando a operação da derivada material, o conceito da linearidade do produto vetorial e o teorema da divergência, chega-se à importante prova de que o tensor das tensões Σ é simétrico (prova que pode ser verificada em WAGONER [1997]). Daí sabermos, portanto, que tal tensor tem seis, e não nove, variáveis independentes.

3.5.2.4. Equações do Movimento do Contínuo

A completa análise de um contínuo deve obedecer à cinco equações, a saber:

a) Uma equação da continuidade:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho(\vec{x},t)\, dV = 0 \tag{3.33}$$

b) Três equações do movimento – uma para cada direção:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, \dot{\vec{x}}\, dV = \int_V div(\Sigma)\, \mathrm{dV} + \int_V b\, dV \tag{3.37}$$

c) Uma equação de energia:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dW}{dt} \tag{3.42}$$

onde Q é a energia calorífica, K a cinética, V a potencial e W é o trabalho realizado.

Nos problemas em que a dissipação de energia mecânica é desprezível, basta considerar as quatro primeiras equações. Nesses problemas, o campo da temperatura é determinado somente por fatores não-mecânicos. Nos casos em que a dissipação é apreciável, a consideração do problema como puramente mecânico é, ainda, uma alternativa simplificadora para que se consiga aproximar uma solução.

Para o caso do processo termodinâmico ser considerado, a caracterização completa do contínuo se dá com a descrição do estado do sistema. Para tanto se faz necessária a segunda lei da termodinâmica – da entropia. Ela dita que todos os processos termodinâmicos reais são irreversíveis. A entropia do sistema é sempre positiva, ou seja, há sempre aumento do calor do sistema, advindo das outras formas de energia. A inequação da irreversibilidade da entropia é escrita desta forma:

$$ds = \frac{dq}{T} \rangle\ 0 \tag{3.43}$$

onde ds é o incremento de entropia específica, dq é o incremento de calor por unidade da massa no sistema e T é a temperatura absoluta – sempre positiva nos casos de máquinas reais.

Em nosso estudo estrito, acerca da conformação mecânica e de sua simulação, não levaremos em conta os efeitos termodinâmicos. Nosso sistema de equações fica, pois, reduzido às quatro primeiras equações apresentadas. Temos, então, dez incógnitas, que são funções do espaço e do tempo. São elas: a massa específica, três componentes da velocidade e seis componentes do tensor das tensões – admitindo-o simétrico.

3.6 Relações Constitutivas

A Mecânica dos Sólidos, como parte da Mecânica do Contínuo, baseia sua estrutura em três tipos de equações: as diferenciais de equilíbrio, que relacionam as

tensões com as forças externas; as de compatibilidade, que fazem a relação entre os deslocamentos e as deformações; e as relações constitutivas, que relacionam, por sua vez, as tensões com as deformações. Desta forma, a análise pode ser feita tendo como incógnita base o deslocamento.

3.6.1 Introdução à Teoria da Plasticidade

No caso dos metais, a relação constitutiva mais importante é a que advém do modelo plástico, que ora será tratado. A teoria da plasticidade estuda o comportamento dos materiais, cujas deformações extrapolaram o domínio de validade da Lei de Hooke, ou seja, estão além do comportamento elástico. O comportamento plástico dos sólidos se caracteriza por uma relação variável entre tensões e deformações, diferentemente do caso da elasticidade. Uma característica do comportamento plástico de um corpo é a existência de deformações e tensões remanescentes após o descarregamento das forças externas.

Quanto aos mecanismos, a deformação elástica ocorre em nível atômico. O fenômeno observado é resultante de vicissitudes no espaço interatômico, o que é necessário para o equilíbrio das cargas externas. Isto gera movimentos reversíveis de átomos na rede em que suas estruturas cristalinas estão arranjadas; permite a volta ao arranjo inicial em caso de retirada da carga exterior. Já no caso de um comportamento plástico, a deformação acontece no nível do grão, ou cristal. Isto se deve aos deslocamentos permanentes dos átomos de suas posições de equilíbrio, gerando discordâncias na rede cristalina.

As dificuldades de análise de um comportamento plástico são muitas. Começam pelo fato de que a deformação plástica depende, não apenas dos estados inicial e final, mas também do modo como a solicitação mecânica é exercida no corpo durante esta trajetória. Um outro ponto de dificuldade é a medição da constante de encruamento, a qual relaciona as tensões e as deformações – é análoga ao módulo de *Young*, na teoria

da elasticidade. Há ainda o fenômeno do encruamento, definido fisicamente adiante, que introduz uma grande complexidade matemática aos modelos teóricos.

Os problemas aumentam o grau de complicação quando se trata de alguns aspectos do comportamento real dos materiais, como por exemplo, a anisotropia plástica.

Na prática, a teoria da plasticidade é utilizada para a determinação dos limites máximos de cargas que podem ser aplicadas a um corpo, sem lhe causar um escoamento excessivo. O critério de escoamento deve ser expresso em termos de tensão, de tal modo que seja válido em todos os estados de tensões.

3.6.2 A Curva de Escoamento

A curva tensão-deformação é de interesse fundamental na plasticidade. É obtida através de um ensaio com carregamento uniaxial, como por exemplo o ensaio simples de tração. Em se considerando, pois, o comportamento do material conforme apenas uma dimensão, percebemos que no processo de carregamento não se pode distinguir se o material está em regime elástico ou plástico ; para tanto, é necessário que haja o seu descarregamento, como mostrado na figura seguinte [ZIENKIEWICZ, 1991]:

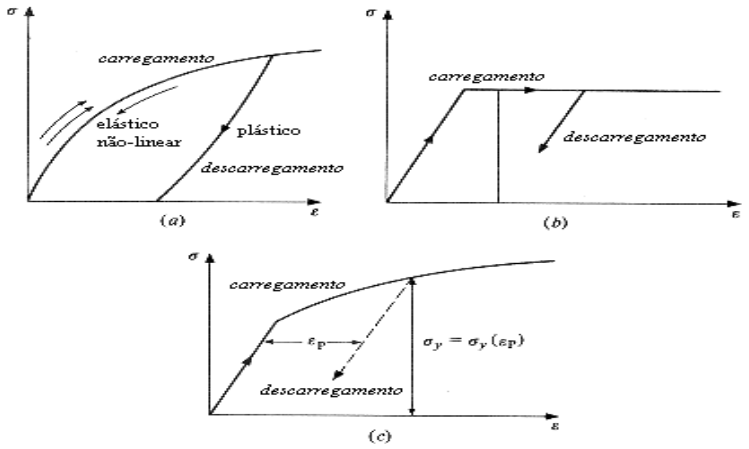


Figura 3.5 – Comportamento Uniaxial

a) elástico não-linear e plástico; b) plasticidade ideal ; c) plasticidade com encruamento.

A curva tensão-deformação verdadeira é também conhecida como curva de escoamento ; isto porque ela fornece a tensão necessária para causar o escoamento plástico em qualquer grau de deformação. Dentre as várias tentativas de se ajustarem equações matemáticas a esta curva, a mais utilizada é a seguinte expressão potencial, já apresentada no segundo capítulo desta tese:

$$\sigma_v = k\varepsilon^n \tag{2.4}$$

É observado que esta equação somente é válida entre o início da deformação plástica e o início do empescoçamento.

Em muitas aplicações, o encruamento pode ser desprezado, simplificando consideravelmente a análise de problemas estruturais complexos ; esta aproximação– figura 3.*5-b* – é chamada de plasticidade ideal ou comportamento plástico perfeito [CHEN, 1988].

Uma abordagem bastante satisfatória e bem mais realista é a aproximação da curva elasto-plástica por duas retas, a primeira representando o regime elástico e a segunda o regime plástico, como mostrado na figura:

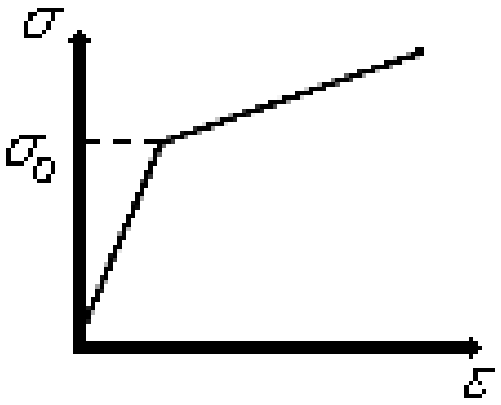


Figura 3.6 – Comportamento elasto-plástico com encruamento linear, onde σ_0 é a tensão de escoamento, limite elástico do material.

3.6.3 Critérios de Escoamento

A predição das condições de início de escoamento de um material sujeito a um estado de tensões qualquer é efetuada através de complexas deduções de relações matemáticas. No caso do carregamento uniaxial, o escoamento plástico macroscópico é facilmente verificado quando se atinge a tensão de escoamento, σ_0, exemplificada no caso particular da figura 3.6 .

No atual desenvolvimento das ciências, ainda não foi possível estabelecer uma teoria capaz de expressar, a partir das componentes de tensão, as relações entre um escoamento num estado tridimensional de tensões e o escoamento medido num ensaio de tração uniaxial. Os critérios criados para suprir tal necessidade são relações essencialmente empíricas ; contudo, os critérios de escoamento devem ser consistentes com certas observações experimentais. Dentre estas, a mais importante diz respeito ao fato de que um sólido sujeito unicamente à pressão hidrostática não sofre escoamento. Portanto, a componente hidrostática de um estado complexo de tensões não influencia a tensão de escoamento [DIETER, 1981].

Num caso geral, os critérios de plastificação – ou escoamento – definem os limites elásticos de um material sob uma determinada combinação de estados de tensão.

Um critério de escoamento bastante generalizado pode ser expresso da seguinte forma, na notação matricial [PIMENTA, 1994]:

$$f(\boldsymbol{\Sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{A}\,\boldsymbol{\Sigma}} \; + \; \mathbf{B} : \boldsymbol{\Sigma} \; + \; c \tag{3.45}$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}$ é o tensor das tensões de Cauchy , $\mathbf{A}$ é um tensor de quarta ordem, $\mathbf{B}$ é um tensor de segunda ordem e c é uma constante.

De uma forma prática, para um caso geral, a condição de plastificação pode ser assim expressa [CHEN, 1988] :

$$f(\Sigma\ , k_1, k_2, \ldots)\begin{cases} \leq 0 & \text{(material resiste)} \\ > 0 & \text{(material não resiste)} \end{cases} \tag{3.46}$$

onde $k_1, k_2, \ldots$ são constantes do material, cuja determinação, bem como a da tensão de escoamento σ_0 , também se dá através de experimentação.

Entende-se, normalmente, que um material não resiste a um estado de tensões, quando ele se rompe, sofre fratura, é esmagado, escoa ou quando é acometido por outros danos considerados excessivos. Contudo, muitas vezes, a resistência de um material é apenas convencional, não caracterizando estados de tensão fisicamente observáveis e bem determinados, mas sim, estados não desejáveis de tensão.

Para os materiais isotrópicos, os valores das tensões principais são suficientes para descrever o estado de tensões unicamente. Então, o critério de escoamento é relacionado à uma combinação particular das tensões principais:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_1, k_2, \ldots) = 0 \tag{3.47}$$

onde σ_1, σ_2 e σ_3 são, respectivamente, as tensões principais algebricamente maior, média e menor.

A função f designa a superfície de fluência. Segundo a hipótese geral, demonstrada empiricamente, a tensão limite de escoamento é alcançada quando as tensões satisfazem a condição limite geral, expressa na equação 3.45. Este critério pode ser representado como uma superfície num espaço de tensões *n*-dimensional, onde as posições dos pontos dependem dos valores instantâneos dos parâmetros k [ZIENKIEWICZ, 1991].

A figura a seguir mostra a superfície de fluência para um espaço bidimensional de tensões, representando também o critério de ortogonalidade, segundo o qual, as deformações plásticas se desenvolvem sempre perpendicularmente à superfície de fluência:

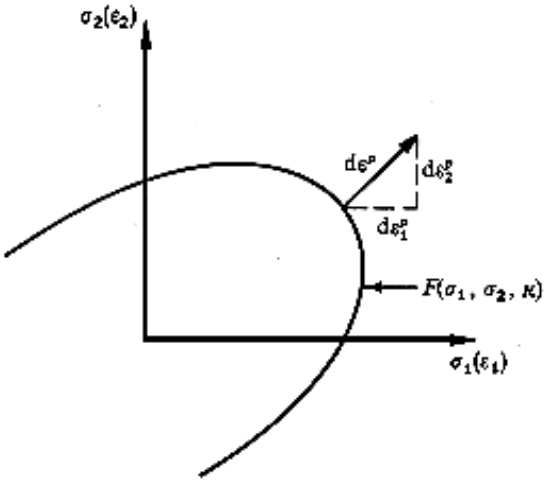


Figura 3.7 – Superfície de fluência num espaço bidimensional de tensões [ZIENKIEWICZ,1991].

Dentre os diversos critérios já propostos, destacam-se, na análise de metais, os critérios ditos isotrópicos. Isto porque tais critérios independem da base onde está expresso o tensor das tensões. Podem ser escritos, de formas equivalentes, segundo o uso combinado de alguns dos invariantes do tensor das tensões, como por exemplo:

$$f(\Sigma) = f(I_1, I_2, I_3)$$

$$f(\Sigma) = f(I_1, J_2, \theta) \tag{3.48}$$

$$f(\Sigma) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Geralmente, os critérios de plastificação isotrópicos são usados na previsão do início do escoamento de metais dúcteis [DIETER, 1981]. Os principais são quatro, a saber:

i) Critério de Von Mises:

Segundo Von Mises propôs em 1913, o escoamento se dá quando o segundo invariante da tensão-desviatória, J_2, excede um determinado valor crítico, k, sendo que J_2 é assim definido:

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \tag{3.49}$$

Este critério pode ser escrito da seguinte maneira:

$$f = \sqrt{J_2} - k \tag{3.50}$$

ii) Critério de Tresca:

Também chamado de critério da tensão cisalhante máxima, foi inicialmente formulado para metais. Este critério admite que o escoamento ocorre quando a tensão de cisalhamento máxima atinge o valor da tensão cisalhante no ensaio de tração uniaxial. A tensão cisalhante neste ensaio simples de tração é dada pela expressão:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{3.51}$$

iii) Critério de Mohr-Coulomb:

Conforme Mohr propôs em 1900, este critério, considerado uma generalização do critério de Tresca, supõe que um material não suporta, em qualquer que seja o plano,

tensões de cisalhamento superiores a um certo valor κ, função apenas da tensão normal, σ, atuante no mesmo plano em que a tensão de cisalhamento τ atua, como observamos na seguinte equação:

$$f = \tau - \kappa(\sigma) \tag{3.52}$$

A forma mais simples desta função, é uma reta, conhecida como equação de Coulomb, e foi proposta em 1773. Através de sua aplicação na equação 3.51 , obtemos o chamado critério de Mohr-Coulomb:

$$f = \tau - \sigma\, tg\varphi - C \tag{3.53}$$

onde φ é o ângulo de atrito interno e C é conhecido como coesão.

iv) Critério de Drucker-Prager

Este critério, proposto no meio deste século, é uma simplificação do critério de Mohr-Coulomb. Pode também ser entendido como uma modificação do critério de Von Mises – equação 3.50 – , da seguinte forma:

$$f = \alpha\, I_1 + \sqrt{J_2} - k \tag{3.54}$$

onde α é uma constante.

As superfícies de fluência dos critérios de Mohr-Coulomb e de Tresca têm, no plano anti-esférico, um formato hexagonal, sendo conveniente matematicamente apenas em problemas onde se sabe com clareza qual é a direção em que se dará o escoamento plástico, e por conseguinte, qual dos seis lados será usado. Devido à existência de

vértices na superfície de fluência, estes critérios são menos utilizados computacionalmente [CHEN, 1988].

Na figura abaixo são mostradas as superfícies de fluência referentes aos critérios de escoamento ora apresentados:

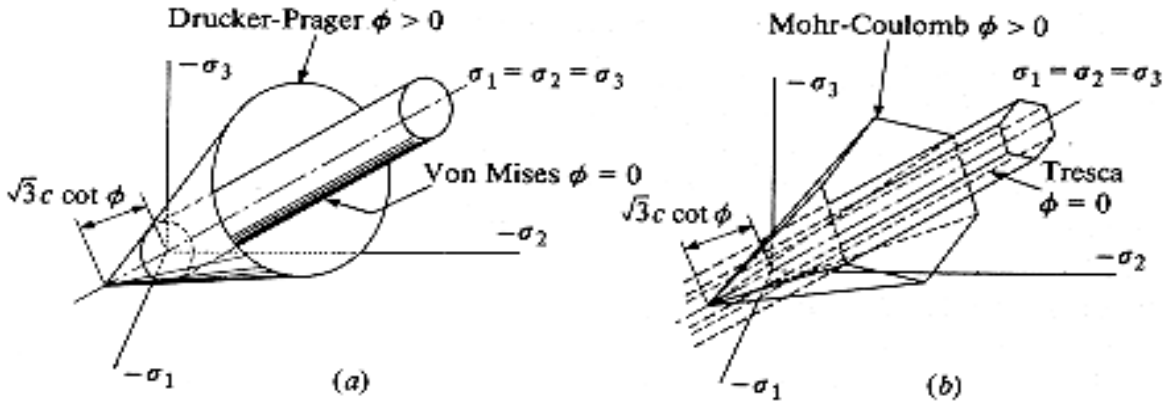


Figura 3.8 – Superfícies de fluência isótropas no espaço tridimensional de tensões principais [ZIENKIEWICZ, 1991].

Capítulo 4

Acerca dos Métodos de Discretização do Contínuo

A complexidade da natureza, que nunca se mostra em-si, mas somente para-si, é tal que a mente humana, para conseguir captar um quê a respeito dos fenômenos que a rodeiam, subdivide-os em categorias. Daí, que uma forma natural de proceder nas ciências consiste em separar os sistemas em suas partes componentes. Desta forma, tendo um sistema mais simples, torna-se mais fácil obter uma resposta para, então, reconstruir-se o sistema original. Ocorre que, por vezes, perde-se a dimensão do todo e, por conseguinte, da verdade, cabendo sempre uma análise posterior fenomenal.

Há casos em que se obtém modelos adequados que representem a natureza contínua, utilizando um número finito de componentes bem definidas. Estes são denominados problemas discretos. Noutros, a subdivisão prossegue indefinidamente e o problema só pode ser definido fazendo uso da abstração matemática do cálculo infinitesimal [ZIENKIEWICZ, 1980].

Com o advento dos computadores, os problemas discretos puderam ser resolvidos com muito mais facilidade, especialmente quando o número de elementos constituintes é muito elevado. Já os problemas contínuos, sempre dependem de uma resolução exata mediante manipulação matemática, o que limita bastante as suas possibilidades de resolução.

Ao efetuar-se uma discretização de um problema, faz-se necessário efetuar aproximações; o ideal é que estas se acerquem ao máximo da solução do problema contínuo original, à medida que cresça o número de variáveis discretas.

4.1 Discretização Espacial: O Método dos Elementos Finitos

A análise de sólidos e estruturas foi a área onde primeiro se aplicou o método dos elementos finitos, tendo, a partir daí, obtido um ímpeto desenvolvimentista.

Uma possível interpretação física do Método dos Elementos Finitos, no caso da mecânica, pode ser dada pela analogia da estrutura como sendo um arranjo de elementos cheios, conectados através de nós em comum e com uma matriz de rigidez calculada em decorrência do tipo de elemento escolhido, da geometria da estrutura e de sua reologia [ZAGOTTIS, 1982].

As equações básicas dos elementos finitos podem ser derivadas de várias maneiras. Os métodos mais utilizados para o equacionamento são as formulações ditas variacionais – método dos trabalhos virtuais e método de Ritz, entre outros – e os métodos dos resíduos ponderados – especificamente o método de Galerkin [FAGAN, 1992].

A formulação padrão para uma solução de elementos finitos de sólidos é o método dos deslocamentos. Este método é bastante usado e fornece bons resultados em muitos tipos de análises lineares de estruturas. No caso da análise de estruturas de placas ou cascas, o método dos deslocamentos é, em geral, estendido a outras variáveis primárias, gerando as chamadas formulações mistas. Desta forma, outras grandezas, além dos deslocamentos, são consideradas como variáveis desconhecidas, tais como as deformações ou as tensões.

Há várias formulações de elementos finitos baseadas no método dos deslocamentos ou mesmo nas formulações mistas; contudo, nosso objetivo é o de apresentar aquelas formulações mais consagradas e consideradas mais importantes. Sendo assim, o método dos elementos finitos será ora formulado de uma forma bastante generalizada, através do clássico Princípio dos Trabalhos Virtuais.

4.1.1 Método dos deslocamentos

O método dos elementos finitos baseado nos deslocamentos pode ser entendido como uma extensão do método dos deslocamentos usualmente aplicado à teoria das barras. Num caso de um sólido geral, o número de interconexões entre um elemento qualquer, rodeado por fronteiras imaginárias, e os elementos vizinhos a ele é infinito. Por conseguinte, num primeiro momento é difícil conceber a analogia deste problema geral com aquele problema da teoria das barras. Para tanto, pode-se seguir os seguintes passos [ZIENKIEWICZ, 1980]:

i) Idealiza-se a estrutura como uma montagem de partes em conexão, como se o contínuo se dividisse mediante superfícies (ou linhas) imaginárias em um certo número de elementos finitos.

ii) Supõe-se que tais elementos estão conectados entre si, através de um número discreto de pontos, que chamaremos “nós”, situados em seu contorno; os deslocamentos deste nós serão as incógnitas fundamentais deste problema, tal como ocorre numa análise de uma simples estrutura.

iii) Toma-se, pois, um conjunto de funções que definam de maneira única o campo de deslocamentos dentro de cada “elemento finito” em função dos deslocamentos nodais do dito elemento.

iv) Com estas funções de deslocamento, estão definidos, portanto, de maneira única, o estado de deformações dentro de cada elemento, em função dos deslocamentos nodais. Tais deformações, junto com as deformações iniciais e com as

propriedades constitutivas do material, permitem então que seja definida a distribuição de tensões internas em todo o elemento e, conseqüentemente, em todo o seu contorno.

v) Determina-se, então, um sistema de forças concentradas nos nós, tal que equilibre as tensões no contorno, resultando daí uma relação entre forças e deslocamentos.

vi) Por fim, interpreta-se, baseado nas hipóteses estabelecidas, as respostas – deslocamentos e tensões – calculadas conforme a idealização estrutural.

Ao alcançar-se este ponto, já foram introduzidas uma série de aproximações; em primeiro lugar, é tarefa difícil assegurar que as funções de deslocamentos escolhidas satisfaçam às condições de continuidade de deslocamentos entre elementos adjacentes; devido a isto, estas condições de compatibilidade podem não se cumprir no contorno dos elementos, ainda que dentro dos elementos elas sempre se cumprirão, em vista da unicidade dos deslocamentos representados por funções contínuas ; em segundo lugar, ao serem concentradas nos nós, as forças equivalentes, as condições de equilíbrio somente se cumprirão, em geral, para a totalidade do corpo contínuo. Por estes motivos, uma boa escolha de elementos, bem como de funções de deslocamento, em cada caso particular, depende em parte da experiência do construtor do modelo de elementos finitos.

4.1.2 O Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais é, no presente trabalho, a base para a formulação das equações gerais do método dos elementos finitos. São estabelecidas tais equações para um corpo tridimensional qualquer, a partir da equação diferencial do movimento, advinda da mecânica do meio contínuo, cuja solução deve satisfazer as condições de contorno naturais e essenciais. Para os casos onde houver contato, a solução deverá satisfazer também as condições de descontinuidade do contato.

4.1.2.1 Enunciado e Demonstração: Caso Geral

Seja um corpo deformado, em equilíbrio, sujeito à um deslocamento compatível virtual arbitrário δu, associado a uma deformação do corpo, o trabalho virtual das forças externas $\delta \mathrm{W_e}$ do corpo é igual à energia de deformação virtual das tensões internas $\delta \mathrm{W}i$ adicionada à variação virtual da energia cinética, $\delta \mathrm{T}$. Os deslocamentos compatíveis, ditos virtuais, são aqueles que satisfazem as condições de contorno e asseguram não-descontinuidades [LOGAN,1986].

Seja um campo de deslocamentos δu, denominado deslocamentos virtuais e um volume na configuração instantânea, V, tal que $\delta u \in V$. O trabalho virtual dos esforços externos é definido por:

$$\delta \mathrm{W_e} = \int_V b \cdot \delta u \, \mathrm{d}V + \int_S t \cdot \delta u \, \mathrm{d}S \tag{4.1}$$

onde b é o vetor das forças de campo e t o vetor das tensões, ambos na configuração atual, sendo S a superfície externa de V.

A energia virtual das tensões internas, ou trabalho virtual dos esforços internos, é definido como se segue, segundo o Tensor das Tensões de Cauchy, Σ :

$$\delta \mathrm{W}i = \int_V \Sigma : \mathbf{D} \ \mathrm{d}V \tag{4.2}$$

onde **D** trata-se do Tensor Taxa de Deformação, apresentado no capítulo segundo.

Na forma incremental – conforme a igualdade apresentada na equação 3.20 – utiliza-se a derivada no tempo do Tensor das Deformações Infinitesimais, $\widetilde{\mathrm{E}}$,visto que este tensor é energeticamente conjugado com o tensor de Cauchy :

$$\delta \mathrm{W}i = \int_V \Sigma : \delta\widetilde{\mathrm{E}} \, \mathrm{d}V \tag{4.3}$$

Isto, contudo, não restringe a análise às pequenas deformações, pelo fato de ser utilizada apenas uma variação virtual de $\widetilde{\mathrm{E}}$; para tanto, basta que se tome um deslocamento virtual também infinitesimal, o que não é problema, visto ser uma escolha de livre-arbítrio:

A variação virtual da energia cinética pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta \mathrm{T} = \int_V \rho \, \ddot{u} \cdot \delta u \, \mathrm{d}V \tag{4.4}$$

Aplicando-se o teorema do divergente, na forma da equação 3.28, com $f = \delta u$ e $g = \Sigma$, num volume *V*, cujo contorno é *S*, obtemos a seguinte relação, cuja prova pode ser obtida em WAGONER [1997]:

$$\int_V div\Sigma \, \delta u \, dV = \int_S \Sigma \, \hat{n} \, \delta u \, dS - \int_V \Sigma : \delta\widetilde{\mathrm{E}} \; dV \tag{4.5}$$

pois $\Sigma^T = \Sigma$, visto que o tensor de Cauchy possui simetria.

Aplicando este resultado na equação 4.1, temos pois:

$$\delta \mathrm{W_e} = \int_V b \cdot \delta u \, \mathrm{d}V + \int_S t \cdot \delta u \, \mathrm{d}S \; = \tag{4.1}$$

$$= \int_V b \cdot \delta u \; \mathrm{d}V + \int_S (\Sigma \, \hat{n}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S + \int_S (t - \Sigma \, \hat{n}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S \; =$$

$$= \int_V [(div \Sigma + b) \cdot \delta u + \Sigma : \delta \widetilde{\mathrm{E}}] \, \mathrm{d}V + \int_S (t - \Sigma \, \hat{n}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S \; =$$

$$= \delta \, \mathrm{W_i} + \delta \, \mathrm{T} + \int_V (div \Sigma + b - \rho \ddot{u}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}V + \int_S (t - \Sigma \, \hat{n}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S \tag{4.6}$$

Logo, confirma-se o enunciado proposto, estando, então, provado:

$$\delta \, \mathrm{W_e} = \delta \, \mathrm{W_i} + \delta \, \mathrm{T} \, , \quad \forall \delta u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} div \, \Sigma + b = \rho \ddot{u} & , \text{em } V \quad \text{e} \\ t = \Sigma \, \hat{n} & , \text{em } S \quad . \end{array} \right\} \tag{4.7}$$

Podemos também escrever a equação 4.7 da seguinte forma equivalente, todavia menos concisa, com as grandezas envolvidas mais claramente explicitadas:

$$\int_V b \cdot \delta u \, \mathrm{d}V + \int_S t \cdot \delta u \, \mathrm{d}S = \int_V \Sigma : \delta \widetilde{\mathrm{E}} \, \mathrm{d}V + \int_V \rho \, \ddot{u} \cdot \delta u \, \mathrm{d}V \tag{4.8}$$

Conclui-se, portanto que a igualdade $\delta W_e = \delta W_i + \delta T$, $\forall \delta u$, é condição tanto necessária quanto suficiente para que haja o equilíbrio dinâmico do sólido; está demonstrada, de forma generalizada, a proposição conhecida como o Teorema dos Trabalhos Virtuais.

4.1.2.2 O Problema "Quasi- Estatico"

Um importante caso particular que merece uma atenção especial são os processos conhecidos como *quasi-estaticos*, onde a aceleração é considerada desprezível. Nestes casos, tudo se passa como se o problema fora estático, ou melhor, como se houvesse uma sucessão contínua de problemas estáticos, que são discretizados e integrados no tempo. A cada passo desta sucessão no tempo pode haver variação das forças externas; contudo, as forças de inércia ($F_{inércia} = m * a$), não são consideradas no cálculo.

Temos a seguinte simplificação, pois:

$$\delta W_e = \delta W_i + \int_V (div\Sigma + b) \cdot \delta u \, dV + \int_S (t - \Sigma \hat{n}) \cdot \delta u \, dS \tag{4.9}$$

Logo, temos:

$$\delta W_e = \delta W_i, \quad \forall \delta u \Leftrightarrow \quad \begin{cases} div\,\Sigma + b = 0 & \text{, em } V \text{ e} \\ t = \Sigma \hat{n} & \text{, em } S \text{ .} \end{cases} \tag{4.10}$$

Neste caso a condição necessária e suficiente para o equilíbrio externo e interno do sólido reduz-se a : $\delta W_e = \delta W_i$, $\forall \delta u$ [PIMENTA, 1994].

4.1.2.3 Das Condições de Contorno

Consideremos a superfície, S , externa, ou de contorno, do sólido enunciado em 4.2.1. Seja $S = S_u \cup S_t \cup S_c$ e seja também $S_u \cap S_t \cap S_c = 0$, onde S_u é a parte de S em que estão determinados previamente os deslocamentos e, eventualmente, aplicadas cargas concentradas, S_t é definida como a parte de S, onde há apenas carregamentos distribuídos, e S_c é a parte do contorno sujeita a contato [BATHE,1996].

Da mecânica do contínuo, sabemos que, para a solução da equação do movimento estar completa, deve satisfazer às seguintes condições, que na prática, reduzem o número total de incógnitas :

i) Condições de Contorno Essenciais

São também chamadas Geométricas, ou ainda, dos Deslocamentos, e podem ser assim definidas:

$$u = u_u \quad , \qquad \text{em} \quad S_u \tag{4.11}$$

Devido às condições de contorno essenciais, deve-se restringir os campos de deslocamentos virtuais àqueles em que os deslocamentos estão restritos, ou seja:

$$\delta u = 0 \ , \qquad \text{em} \ \ S_u \tag{4.12}$$

pois os deslocamentos virtuais devem necessariamente satisfazer às condições de todo o seu domínio, inclusive onde há restrição de deslocamentos.

ii) Condições de Contorno Naturais

Tais condições também são ditas Físicas, ou das Tensões, podendo ser definidas como se segue:

$$t_t = \Sigma \ \hat{n} \ , \qquad \text{em} \quad S_t \tag{4.13}$$

Com o uso das condições de contorno naturais, temos que o trabalho virtual dos esforços externos pode ser assim definido:

$$\delta \, \mathrm{W_e} = \int_V b \cdot \delta \, u \, \mathrm{d}V + \int_{S_t} t_t \cdot \delta \, u \, \mathrm{d}S \ = \tag{4.14}$$

Analogamente ao efetuado no caso geral da equação 4.1 , aplica-se o teorema do divergente em 4.15, resultando no seguinte:

$$\delta \mathrm{W_e} = \delta \, \mathrm{W_i} + \delta \, \mathrm{T} + \int_V (div\Sigma + b - \rho \ddot{u}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}V + \int_{S_t} (t_t - \Sigma \, \hat{n}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S \tag{4.15}$$

Logo, chegamos a:

$$\delta \, \mathrm{W_e} = \delta \, \mathrm{W_i} + \delta \, \mathrm{T} \, , \ \ \forall \delta \, u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} div\,\Sigma + b = \rho \ddot{u} & , \text{em} \ \ V \quad \text{e} \\ t_t = \Sigma \, \hat{n} & , \text{em} \ \ S_t \quad . \end{array} \right\} \tag{4.16}$$

Portanto, estão reduzidas as exigências para que o sólido se encontre em equilíbrio interno e externo.

iii) Condições de Contato

Há um terceiro tipo de condições a serem satisfeitas, em determinados casos onde ocorrem contatos entre os corpos em questão. São chamadas de Condições de Descontinuidade de Contato, e podem ser colocadas sob a seguinte forma:

$$(\Sigma^{+} - \Sigma^{-})\,\hat{n} = 0 \ , \quad \text{no interior de } S_c \text{, quando } x^{+} = x^{-}, \tag{4.17}$$

onde os sinais sobrescritos denotam grandezas de um e de outro corpo sujeito ao contato.

As condições de descontinuidade de contato são tratadas computacionalmente através de algoritmos. No caso do programa de resolução DYNA, são três os algoritmos implementados, a saber: o método da restrição cinemática, o método das penalidades e o método de parametrização distribuída. Estes algoritmos definem um dos lados do contato como sendo a superfície mestra, ou alvo, enquanto que o outro lado é a superfície contactante, também chamada acoplada. Os nós de cada um destes lados são ditos, por conseguinte e respectivamente, nós mestres (ou alvos) e nós contactantes (ou acoplados) [HALLQUIST, 1993].

No método da restrição cinemática, as equações globais são restritas por uma transformação das componentes de deslocamento dos nós acoplados ao longo da interface de contato. Esta transformação tem o efeito de eliminar o grau-de-liberdade normal dos nós.

O método das penalidades consiste em estabelecer uma força elástica normal na interface entre os nós penetrantes e a superfície oposta. Desta forma, forças de repulsão vão surgindo à medida que a superfície alvo vai sendo penetrada pela contactante.

Por fim, segundo o método da parametrização distribuída, metade da massa de cada elemento contactante é dividida entre a superfície alvo. Além disto, as tensões internas em cada elemento determinam a distribuição de pressões na área da superfície alvo que recebe a massa. Após completa esta distribuição de massas e tensões, calcula-se a aceleração atualizada da superfície mestra ; então, impõe-se restrições às velocidades e às acelerações nodais da superfície acoplada, para assegurar seu movimento ao longo da superfície mestra. Não é permitido que haja qualquer invasão dos nós acoplados na superfície do lado mestre.

Os algoritmos de contato, na essência podem ser assim entendidos: considerando-se dois corpos ocupando as regiões Ω_0^+ e Ω_0^-, na configuração indeformada, assume-se que seja satisfeita a seguinte intersecção:

$$\Omega_0^+ \cap \Omega_0^- = 0 \tag{4.18}$$

Na configuração deformada, sejam $\partial\Omega^+$ e $\partial\Omega^-$ os respectivos contornos de Ω^+ e Ω^-, ou seja, a superfície do lado mestre e a superfície acoplada, respectivamente. Negando-se a possibilidade de penetração, temos:

$$(\Omega^+ - \partial\Omega^+) \cap \Omega^- = 0 \tag{4.19}$$

Ao longo de $(\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-) = 0$, as equações de movimento permanecem desacopladas.

Restrições de contato, como as descritas anteriormente nesta seção, são impostas no momento em que ocorre o contato, ou seja, quando:

$$(\partial\Omega^{+} \cap \partial\Omega^{-}) \neq 0$$

A escolha das superfícies mestra e acoplada dos corpos discretizados é irrelevante, no caso do tratamento simétrico das penalidades. Noutros casos, entretanto, essa escolha é bastante importante, pois, após o impacto, os nós contactantes ficam restritos a deslizar por sobre a superfície alvo, até que surja uma força de atrito entre estes nós e a superfície, de forma a impedir tal deslizamento. Deve-se, portanto, escolher como mestra, ou alvo, a superfície discretizada mais grosseiramente, a menos que haja uma grande diferença de densidades entre os materiais, devendo ser escolhido como mestre, neste caso, o lado correspondente ao material com mais alta densidade. Além disto, havendo contato entre uma superfície côncava e outra convexa, a primeira deve ser escolhida como mestra, enquanto que a segunda deve ser a contactante [HALLQUIST, 1993].

4.1.2.4 Acerca de Outras Formulações Para Casos Não-Lineares

A formulação do Princípio dos Trabalhos Virtuais na configuração atual, segundo o Tensor das Tensões de Cauchy, é amplamente utilizada na discretização espacial pelo Método dos Elementos Finitos. Traz a vantagem de que já existem vários elementos de discretização implementados em programas computacionais, formulados a partir do seu uso, válidos tanto para análises lineares, quanto para análises não-lineares. Além disto, é um tensor que possui simetria.

Este tensor, simétrico, tem componentes com um significado físico claro, a saber, suas componentes representam uma força distribuída numa área, ambos no instante presente da medição. Devido a isto o Tensor de Cauchy foi de início aplicado aos problemas lineares e, posteriormente, aplicado a problemas com não-linearidades, visto que as matrizes de interpolação usadas na discretização por elementos finitos podem ser as mesmas usadas na linearidade. Então, com apenas uma Matriz de Interpolação dos

Deslocamentos e, portanto, também com apenas uma Matriz Deformação-Deslocamento, pode-se formular diversos tipos de elementos a serem disponibilizados em programas de simulação, tanto em uma análise linear, como sob não-linearidades.

Conforme exposto na seção 3.4 do capítulo terceiro, assim como as deformações, também as tensões podem ser tratadas sob pontos-de-vista diversos, tais como por meio da utilização de ambos os tensores das tensões de Piola-Kirchhoff.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser escrito segundo quaisquer tensores das tensões, desde que se cuide para que também sejam usados os respectivos tensores das deformações energeticamente conjugados, ou seja, desde que o produto escalar do tensor das tensões pela taxa de variação do tensor das deformações resulte na potência dos esforços internos por unidade de volume [PIMENTA,1994].

São energeticamente conjugados os seguintes tensores: das tensões de Cauchy (Σ) e das deformações infinitesimais ($\tilde{E}$); segundo das tensões de Piola-Kirchhoff **(S)** e das deformações de Green **(E)**; primeiro das tensões de Piola-Kirchhoff **(P)** e gradiente das transformações **(F)**.

Portanto, a potência dos esforços internos, resultante destes pares de tensores, são respectivamente: $\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}$, $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$ e $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$. Estas provas podem ser obtidas em MALVERN [1969].

i) O Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff

O primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, **P**, é assimétrico. Isto o torna inadequado para escrever equações constitutivas, visto que variam com movimentos superpostos de corpos rígidos. Contudo, a utilização deste tensor gera uma forma mais simples da equação do movimento. Esta é similar à obtida através do tensor de Cauchy, porém com derivadas em relação às coordenadas materiais, ao invés das coordenadas espaciais, o que simplifica, muitas vezes, o problema. Este tensor tem um uso amplo em problemas que envolvem plasticidade.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais, escritos segundo esse tensor, adquire a seguinte forma:

Seja um campo de deslocamentos, $\delta \mathrm{u}$, e um volume na configuração de referência, V^{r}, tal que $\delta u \in V^{\mathrm{r}}$. O trabalho virtual dos esforços externos é definido por:

$$\delta \mathrm{W_e} = \int_{V^r} b^r \cdot \delta u \, \mathrm{d}V^{\mathrm{r}} + \int_{S^r} t^r \cdot \delta u \, \mathrm{d}S^{\mathrm{r}} \tag{4.18}$$

onde b^r é o vetor das forças de campo e t^r o vetor das tensões, ambos na configuração de referência, sendo S^r a superfície externa de V^r.

O trabalho virtual dos esforços internos é definido por:

$$\delta \mathrm{W}i = \int_{V^r} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, \mathrm{d}V^{\mathrm{r}} \tag{4.19}$$

A variação virtual da energia cinética é:

$$\delta \mathrm{T} = \int_{V^{\mathrm{r}}} \rho^{\mathrm{r}} \ddot{u} \cdot \delta u \, \mathrm{d}V^{\mathrm{r}} \tag{4.20}$$

Aplicando-se o teorema do divergente, na forma da equação 2.28, com $f = \delta u$ e $g = \mathbf{P}$, num volume V, cujo contorno é S, obtemos:

$$\int_V div\mathbf{P}^T \, \delta u \, dV = \int_S \mathbf{P} \, \hat{n} \, \delta u \, dS - \int_V \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, dV \tag{4.21}$$

Aplicando este resultado na equação 4.18, obtemos:

$$\delta \mathrm{W_e} = \int_{V^r} b^r \cdot \delta u \, \mathrm{d}V^{\mathrm{r}} + \int_{S^r} t^r \cdot \delta u \, \mathrm{d}S^{\mathrm{r}} \tag{4.18}$$

$$= \int_{V^r} b^r \cdot \delta u \, \mathrm{d}V^r + \int_{S^r} (\mathbf{P}\, \hat{n}^{\mathrm{r}}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S^r + \int_{S^r} (t^r - \mathbf{P}\, \hat{n}^{\mathrm{r}}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S^r$$

$$= \int_{V^r} [(div \mathbf{P}^{\mathrm{T}} + b^r) \cdot \delta u + \mathbf{P} : \delta \mathbf{F}\,] \mathrm{d}V^r + \int_{S^r} (t^r - \mathbf{P}\, \hat{n}^r) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S^r$$

$$= \delta \mathrm{W_i} + \delta \mathrm{T} + \int_{V^r} (div \mathbf{P}^{\mathrm{T}} + b^r - \rho^{\mathrm{r}} \ddot{u}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}V^{\mathrm{r}} + \int_{S^r} (t^r - \mathbf{P}\, \hat{n}^{\mathrm{r}}) \cdot \delta u \, \mathrm{d}S^{\mathrm{r}} \tag{4.22}$$

Logo chegamos a:

$$\delta \mathrm{W_e} = \delta \mathrm{W_i} + \delta \mathrm{T}, \quad \forall \delta u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} div\, P^T + b^r = \rho^{\mathrm{r}} \ddot{u} & , \text{em } V^r \text{ e} \\ t^r = P\, \hat{n}^r & , \text{em } S^r \ . \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{V^r} b^r \cdot \delta u \, \mathrm{d}V^r + \int_{S^r} t^r \cdot \delta u \, \mathrm{d}S^r = \int_{V^r} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, \mathrm{d}V^r + \int_{V^r} \rho^r \ddot{u} \cdot \delta u \, \mathrm{d}V^r \tag{4.23}$$

Desta forma está estabelecido o Princípio dos Trabalhos Virtuais na configuração de referência, o que vem a ser útil em grande gama de problemas

4.1.2.4.2 O Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff

O segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, **S**, possui simetria. Isto faz com que as equações constitutivas permaneçam invariáveis perante movimentos de rotação e, principalmente, de translação [PIMENTA, 1994].

Tal tensor é preferido para formulações do método dos elementos finitos em muitas de suas aplicações não-lineares, tais como a visco-elasticidade e a super-elasticidade. Todavia, sua aplicação em problemas de plasticidade torna complexas por demasia as equações constitutivas, desencorajando seu uso. Nestes casos, uma boa opção com vistas à simplicidade do problema, como dito, costuma ser o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, **P**.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais, escritos segundo esse tensor, adquire forma análoga à exposta segundo o tensor **P** , modificando apenas a expressão para o trabalho das forças internas, também escrito na configuração de origem:

$$\delta \, \mathrm{W}i = \int_{V^r} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV^r \,, \tag{4.24}$$

onde $\delta \mathbf{E}$ é a deformação virtual, definida por:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) \,. \tag{4.25}$$

Logo, temos a seguinte expressão final do teorema dos trabalhos virtuais, lembrando que $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, devido à simetria deste tensor:

$$\delta W_e = \delta W_i + \delta T, \quad \forall \delta u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} div\, S + b^r = \rho^r \ddot{u} & \text{, em } V^r \text{ e} \\ t^r = S\hat{n}^r & \text{, em } S^r \text{ .} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{V^r} b^r \cdot \delta u \, dV^r + \int_{S^r} t^r \cdot \delta u \, dS^r = \int_{V^r} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV^r + \int_{V^r} \rho^r \ddot{u} \cdot \delta u \, dV^r \qquad (4.26)$$

4.1.3 Discretização do Contínuo Pelo Método dos Elementos Finitos

Estando estabelecido o Princípio dos Trabalhos Virtuais segundo funções contínuas, apresenta-se aqui a sua discretização espacial : o contínuo é dividido em um número finito de partes (elementos), cujo comportamento se especifica mediante um número finito de parâmetros; a solução do sistema completo, como uma montagem de elementos, segue precisamente as mesmas regras que se aplicam a cada uma de suas partes componentes – ou seja, seguem os procedimentos do "problema discreto tipo" [ZIENKIEVICZ, 1980].

4.1.3.1 Funções de Forma Parametrizadas

Comecemos, pois, a discretização do contínuo, discretizando os deslocamentos de um elemento *m* :

$$\vec{u}^{\,m}(\vec{X},t) = \vec{u}^{\,m}\,(\vec{X}(\xi,\eta,\zeta),t\,) = \sum_{k=1}^{l} \phi_k^m(\xi,\eta,\zeta)\;\vec{\widehat{u_k^m}}(t) \tag{4.27}$$

onde ϕ_k são as funções de forma, ou de interpolação do elemento, segundo as coordenadas paramétricas, também ditas naturais, ξ,η,ζ ; e onde l é o número de pontos nodais que definem o elemento ; $\widehat{u_k^m}$ é o vetor deslocamento-nodal referente ao nó k do elemento m .

A principal idéia que leva ao uso das coordenadas parametrizadas é a busca de uma relação simples e direta entre os deslocamentos nodais e os deslocamentos do elemento [BATHE, 1996]. As funções de interpolação assumem, então, neste elemento de referência, formas simples. As relações entre as coordenadas do elemento real e as do elemento de referência devem ser tais que a cada ponto da primeira, corresponda um, e somente um ponto da última.

O exemplo abaixo ilustra as ditas coordenadas parametrizadas:

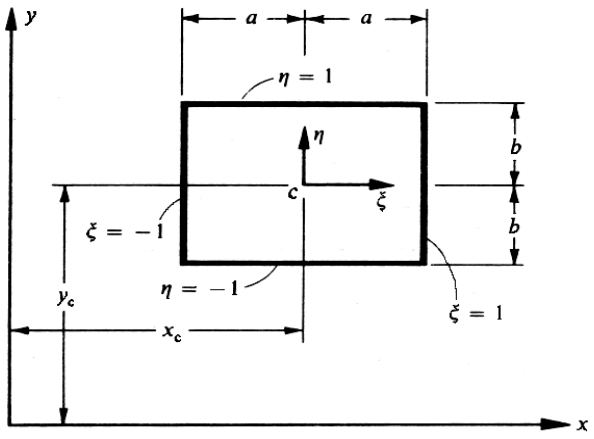


Figura 4.1 – Coordenadas parametrizadas para um retângulo [ZIENKIEVICZ, 1980].

Tais coordenadas foram escolhidas de forma que, nos lados do retângulo, elas adquirem os valores ± 1, facilitando, assim, a busca das funções de forma necessárias à discretização do problema. Em casos gerais, o que se busca como função de forma são polinômios que possuam a maior potência, para um número de graus de liberdade mínimo. Neste contexto, vale lembrar do Triângulo de Pascal, donde podem ser deduzidos os termos de duas variáveis x e y.

Por exemplo, um polinômio de terceiro grau requer dez termos, como se pode constatar na figura:

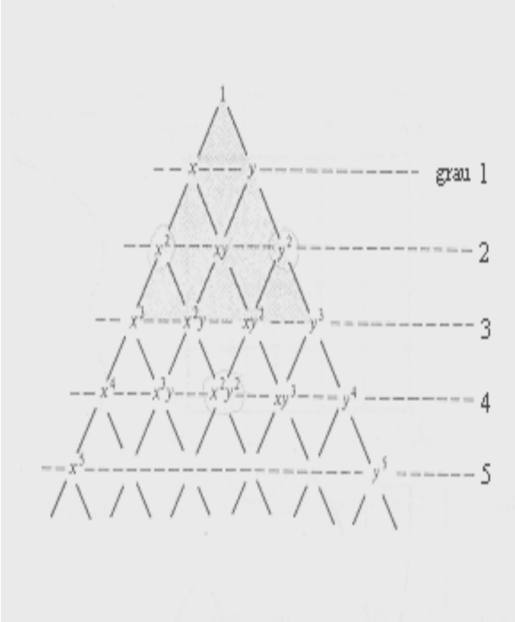


Figura 4.2 – Triângulo de Pascal

4.1.3.2 Discretização do Princípio dos Trabalhos Virtuais

Para aplicar-se a aproximação dos deslocamentos discretos ao teorema dos trabalhos virtuais generalizado – exposto na equação 4.8 –, pode-se reescrevê-lo sob a forma de uma somatória de integrais igualadas a zero, que será chamada $\delta\Pi$:

$$\delta\Pi = \int_V \rho\, \ddot{u} \cdot \delta u \, \mathrm{d}V + \int_V \Sigma : \delta\widetilde{\mathrm{E}} \, \mathrm{d}V - \int_V b \cdot \delta u \, \mathrm{d}V - \int_S t \cdot \delta u \, \mathrm{d}S = 0 \tag{4.28}$$

Para uma malha com *n* elementos, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\delta\Pi = \sum_{m=1}^{n} \delta\Pi^m = 0 \tag{4.29}$$

Estendendo-se aos *n* elementos do corpo a discretização dos deslocamentos de um único elemento *m* , apresentada na equação 4.27 , temos:

$$\vec{u}(\bar{X},t) = \vec{u}(\bar{X}(\xi,\eta,\zeta),t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \phi_k(\xi,\eta,\zeta)\ \bar{\widehat{u_k^m}}(t) \tag{4.30}$$

Tal discretização escrita sob a forma matricial, toma a seguinte forma:

$$u(X,t) = \Phi\, \widehat{u} \tag{4.31}$$

onde $\Phi = \Phi(X)$ é matriz das funções de forma, enquanto que $\widehat{u} = \widehat{u(t)}$ é o vetor de deslocamentos nodais.

A matriz das funções de forma é também chamada de matriz de interpolação dos deslocamentos ; é função da geometria do elemento, do seu número de nós e graus de liberdade, dependendo também, por vezes, de requerimentos de convergência [BATHE, 1996]. Sob a forma parametrizada, tal matriz pode ser escrita em função de seus parâmetros naturais, o que a simplifica consideravelmente, a saber:

$$\Phi = \Phi\,(\xi, \eta, \zeta) \tag{4.32}$$

Então, de forma análoga, podemos discretizar o vetor dos deslocamentos virtuais:

$$\delta u(X,t) = \Phi\ \widehat{\delta u} \tag{4.33}$$

onde $\widehat{\delta u}$ é o vetor dos deslocamentos virtuais nodais.

Daí, obtemos também uma aproximação do vetor dos deslocamentos virtuais para um elemento *m* qualquer:

$$\delta u^{m}(X,t) = \Phi^{m}\ \widehat{\delta u^{m}} \tag{4.34}$$

onde Φ^{m} é a matriz das funções de forma dos *k* nós do elemento *m* , e $\widehat{\delta u^{m}}$ é o vetor de deslocamentos virtuais nodais deste mesmo elemento.

Analogamente à discretização dos deslocamentos virtuais, obtemos a expressão da discretização da variação virtual do tensor das deformações infinitesimais:

$$\delta\widetilde{\mathbf{E}}(X(\xi,\eta,\zeta),t\,) = \mathbf{B}(\xi,\eta,\zeta)\ \ \widehat{\delta u(t)} \tag{4.35}$$

onde $\mathbf{B}(\xi,\eta,\zeta)$ é a matriz deslocamento-deformação.

As linhas da matriz $\mathbf{B}(\xi,\eta,\zeta)$, que relaciona os deslocamentos às deformações, são obtidas através de diferenciações e combinações apropriadas das linhas da matriz das funções de forma, $\mathbf{\Phi}(\xi,\eta,\zeta)$ [BATHE, 1996].

Reescrevendo-se a equação 4.35 para um determinado elemento *m*, tem-se:

$$\delta\widetilde{\mathbf{E}}^{m} = \mathbf{B}^{m}\ \delta\widehat{u^{m}} \tag{4.36}$$

Com a aplicação dos conceitos ora apresentados, é possível, então, propor-se a seguinte discretização espacial do Princípio dos Trabalhos Virtuais [HALLQUIST, 1993]:

$$\delta\Pi = \int_{V} \rho\, \ddot{u} \cdot \mathbf{\Phi}\delta u\, \mathrm{d}V + \int_{V} \mathbf{\Sigma} : \mathbf{B}\delta\widehat{u}\, \mathrm{d}V - \int_{V} b \cdot \mathbf{\Phi}\delta\widehat{u}\, \mathrm{d}V - \int_{S} t \cdot \mathbf{\Phi}\delta\widehat{u}\, \mathrm{d}S = 0 \tag{4.37}$$

Discretizando também o vetor das acelerações, $\ddot{u}$, obtemos:

$$\delta\Pi = \int_{V} \rho\ \ \mathbf{\Phi}\,\widehat{\ddot{u}} \cdot \mathbf{\Phi}\delta u\, \mathrm{d}V + \int_{V} \mathbf{\Sigma} : \mathbf{B}\delta\widehat{u}\, \mathrm{d}V - \int_{V} b \cdot \mathbf{\Phi}\delta\widehat{u}\, \mathrm{d}V - \int_{S} t \cdot \mathbf{\Phi}\delta\widehat{u}\, \mathrm{d}S = 0 \tag{4.38}$$

Rearranjando a equação 4.37, temos, pois

$$\delta\Pi = \delta u^{T}\ \left\{\ \int_{V} \rho\, \mathbf{\Phi}^{T}\mathbf{\Phi}\,\widehat{\ddot{u}} \cdot \mathrm{d}V + \int_{V} \mathbf{B}^{T}\mathbf{\Sigma}\, \mathrm{d}V - \int_{V} \mathbf{\Phi}^{T} b\, \mathrm{d}V - \int_{S} \mathbf{\Phi}^{T} t\ \mathrm{d}S\ \right\} = 0 \tag{4.39}$$

onde $\widehat{\ddot{u}}$ é o vetor das acelerações nodais, e δu^{T} é o vetor dos deslocamentos nodais virtuais transposto.

Lembrando que a equação 4.39 deve ter validade para quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais, podemos escrever simplificadamente:

$$\int_V \rho\, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\, \widehat{\ddot{u}} \cdot \mathrm{d}V + \int_V \mathbf{B}^T \Sigma\, \mathrm{d}V - \int_V \mathbf{\Phi}^T b\, \mathrm{d}V - \int_S \mathbf{\Phi}^T t\, \mathrm{d}S = 0 \tag{4.40}$$

Aplicando-se as condições de contorno naturais do problema – como apresentado na seção 4.1.2.3 – , chegamos a seguinte expressão:

$$\int_V \rho\, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\, \widehat{\ddot{u}} \cdot \mathrm{d}V + \int_V \mathbf{B}^T \Sigma\, \mathrm{d}V - \int_V \mathbf{\Phi}^T b\, \mathrm{d}V - \int_{S_t} \mathbf{\Phi}^T t_t\, \mathrm{d}S = 0 \tag{4.41}$$

Tal expressão, escrita para um elemento *m*, torna-se:

$$\left\{ \int_{V^m} \rho\, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\, \widehat{\ddot{u}} \cdot \mathrm{d}V + \int_{V^m} \mathbf{B}^T \Sigma\, \mathrm{d}V - \int_{V^m} \Phi^T b\, \mathrm{d}V - \int_{S_t^m} \Phi^T t_t\, \mathrm{d}S \right\}^m = 0 \tag{4.42}$$

Finalmente, podemos reescrever a equação 4.41 , efetuando a somatória dos *n* elementos *m*, conforme expressa a equação 4.29 :

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ \int_{V^m} \rho\, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\, \widehat{\ddot{u}} \cdot \mathrm{d}V + \int_{V^m} \mathbf{B}^T \Sigma\, \mathrm{d}V - \int_{V^m} \mathbf{\Phi}^T b\, \mathrm{d}V - \int_{S_t^m} \mathbf{\Phi}^T t_t\, \mathrm{d}S \right\}^m = 0 \tag{4.43}$$

O Tensor das Tensões de Cauchy pode também ser escrito em função das deformações discretizadas, como se segue:

$$\Sigma = \Theta(\widetilde{\mathrm{E}})\ \widetilde{\mathrm{E}} + \Sigma_0 = \Theta(\widetilde{\mathrm{E}})\ \mathbf{B}\, \widehat{u} + \Sigma_0 \tag{4.44}$$

onde $\Theta(\widetilde{E})$ é a matriz de elasticidade não-linear, função do tensor das deformações, e Σ_0 é a matriz das tensões iniciais dadas do material.

O Tensor das Tensões de Cauchy é tratado computacionalmente, sob a forma vetorial, através do rearranjo de seus termos (simétricos), levando-se em consideração também os graus-de-liberdade necessários ao elemento que se está formulando, sendo então chamado vetor das tensões do elemento.

Para que possamos apresentar com mais clareza, na seção seguinte, a discretização temporal do contínuo, faz-se necessário escrever a equação 4.43 na forma clássica da Dinâmica. Para tanto, são necessárias ainda algumas definições, a saber:

$$M = \sum_{m=1}^{n} \{ \int_{V^m} \rho \Phi^T \Phi \, \mathrm{d}V \}^m \tag{4.45}$$

$$K = \sum_{m=1}^{n} \{ \int_{V^m} B \Theta B \, \mathrm{d}V \}^m \tag{4.46}$$

onde **M** é a matriz de massa do sólido e **K** é a sua matriz de rigidez.

Definimos ainda o vetor carregamento da estrutura, como a soma das forças atuantes na estrutura:

$$R = R_B + R_S + R_I + R_C \tag{4.47}$$

sendo que

$$R_B = \sum_{m=1}^{n} \{ \int_{V^m} \Phi^T b \, \mathrm{d}V \}^m \tag{4.48}$$

$$R_S = \sum_{m=1}^{n} \{ \int_{S_{t^m}} \Phi^T t_t \, \mathrm{d}V \}^m \tag{4.49}$$

$$R_I = \sum_{m=1}^{n} \{ \int_{V^m} B^T \Sigma_0 \, \mathrm{d}V \}^m \tag{4.50}$$

onde R_B , R_S , R_I e R_C representam, respectivamente, as forças de campo, as forças de superfície, as forças devido às tensões iniciais do corpo e as forças concentradas nos nós.

Por fim, chegamos à equação do equilíbrio na forma dinâmica:

$$M\ddot{u} + Ku = R \tag{4.51}$$

Para obter uma formulação dinâmica generalizada, devemos considerar também o efeito das forças viscosas de dissipação, dependentes da velocidade:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = R \tag{4.52}$$

onde a matriz de amortecimento **C** é definida por

$$C = \sum_{m=1}^{n} \{ \int_{V^m} \nu \Phi^T \Phi \, \mathrm{d}V \}^m \tag{4.53}$$

sendo v o coeficiente de viscosidade; por simplicidade, porém, esta matriz é normalmente tratada, em programas computacionais, como uma combinação linear de $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$.

4.2 Discretização no Tempo: Métodos de Integração Numérica

Na seção 4.1 foi apresentada a discretização do problema contínuo em relação às três dimensões cartesianas ; nesta seção será discretizada a dimensão tida como quarta: o tempo. Primeiramente, será tratado o método dito implícito e, em seguida, será exposto o método conhecido como explícito.

Por motivo de simplificação, a notação usada anteriormente para designar o vetor de deslocamentos nodais, será abreviada, de forma que se chamará simplesmente de u o que era representado por u, até então.

Deste modo, a equação 4.52 torna-se:

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=R \tag{4.54}$$

De um modo resumido, porém geral, ambos os métodos citados podem ser apresentados, basicamente, segundo a seguinte equação [WAGONER,1997] :

$$u_{n+1}=u_n+(1-\beta)\dot{u}_n\Delta t+\beta\ddot{u}_{n+1}\Delta t \tag{4.55}$$

sendo
$$\begin{cases} \text{para } \beta = 0\text{, explícito;} \\ \text{para } \beta = 1\text{, implícito;} \\ \text{para } \beta = \dfrac{1}{2}\text{, semi - implícito.} \end{cases}$$

onde os índices subscritos, n e $n+1$, significam que os valores foram tomados nos instantes de tempo t_n e t_{n+1}, sendo Δt, o passo de tempo entre estes instantes.

A opção por um ou outro valor de β está intrinsecamente ligada à natureza do problema que se quer resolver, contudo, o método combinado semi-implícito parece oferecer um valor de β mais próximo daquele que se poderia dizer ótimo, para um caso geral [WAGONER, 1997].

4.2.1 Métodos de Integração Implícitos no Tempo

O processador do programa ANSYS efetua as integrações das equações de equilíbrio, já discretizadas espacialmente, utilizando-se de um método de integração numérica implícito no tempo. Tal método, ora apresentado, é conhecido como o Método Padrão de Newmark e é um dos métodos de integração direta mais utilizados na resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias [RODRIGUEZ, 1996].

Devido à necessidade de se inverter a matriz de rigidez, **K** , que é sempre uma matriz consistente, os métodos implícitos utilizam uma grande quantidade de memória computacional. Em problemas com muitos graus de liberdade, como os que envolvem dinâmica, impacto e contato, estes métodos não são recomendados, pois oneram em demasia o processo numérico necessário à resolução. São deste gênero muitos dos processos de conformação mecânica de metais, entre eles a estampagem profunda e o dobramento de barras.

Admitindo-se a hipótese de ser constante a média das acelerações $\ddot{u}_n$ e $\ddot{u}_{n+1}$, entre os instantes t_n e t_{n+1} (para qualquer *n*), obtemos a seguinte equação diferencial de equilíbrio dinâmico, escrita no instante [illegible] :

$$\mathbf{M}\,\ddot{u}_{n+1} + \mathbf{C}\,\dot{u}_{n+1} + \mathbf{K}\,u_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \tag{4.56}$$

De acordo com o Método Padrão de Newmark, chegamos às seguintes equações para a aceleração e velocidade, respectivamente:

$$\ddot{\vec{u}}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n\right) - \frac{4}{\Delta t}\dot{\vec{u}}_n - \ddot{\vec{u}}_n \tag{4.57}$$

$$\dot{\vec{u}}_{n+1} = \dot{\vec{u}}_n + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\ddot{\vec{u}}_{n+1} \tag{4.58}$$

As equações 4.58 e 4.57 , quando aplicadas na equação 4.56, geram um sistema. Este, quando resolvido, permite-nos obter os valores procurados, a saber, as variáveis deslocamento, velocidade e aceleração no instante seguinte, t_{n+1} ; então, repete-se o procedimento no passo consecutivo.

O problema do método implícito está no fato de que a matriz de rigidez (consistente), fica acoplada à variável deslocamento calculada em t_{n+1} – como observamos na equação 4.56. Esta inversão sobrecarrega determinados tipos de problemas. Já as matrizes de massa e de amortecimento podem ser consideradas, por hipótese, matrizes diagonais e, portanto, sua inversão nada mais é do que uma simples divisão dos termos da diagonal principal.

Tem-se, pois, o seguinte sistema, descrito em sua forma matricial:

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M}+\frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\{u_{n+1}\}=\{\mathbf{R}_{n+1}\}+[\mathbf{M}]\left(\frac{4}{\Delta t^2}\{\vec{u}_n\}+\frac{4}{\Delta t}\{\dot{u}_n\}+\{\ddot{u}_n\}\right)+[\mathbf{C}]\left(\frac{2}{\Delta t}\{\vec{u}_n\}+\{\vec{\dot{u}}_n\}\right) \quad (4.59)$$

Como podemos notar, a única variável é u_{n+1}. A matriz **K** terá, pois, que ser invertida ao passar para o lado direito da igualdade, de forma a isolar u_{n+1} e, por fim, resolver o sistema.

4.2.2 Métodos de Integração Explícitos no Tempo

O programa DYNA utiliza em seu processador o Método das Diferenças Centrais, que é um método de integração explícito no tempo, a respeito do qual discorrer-se-á nesta seção.

No caso dos métodos explícitos, a equação de equilíbrio é escrita de forma que a única variável u_{n+1} não está acoplada à matriz consistente de rigidez **K**, mas apenas às matrizes **M** e **C** , que podem ser diagonalizadas e tratadas como vetores, gerando, assim, equações desacopladas. Portanto não é necessário se efetuar a inversão de nenhuma matriz. Na realidade, os métodos explícitos nem sequer necessitam calcular a matriz de rigidez, trabalhando diretamente com o vetor das tensões do elemento.

Desta maneira, com o mesmo número de passos, o método explícito necessita de menos operações, sendo, pois, muito mais vantajoso em casos com muitos graus de liberdade, que geram grandes matrizes e, por conseguinte, sistemas.

Admitindo-se a hipótese de que os deslocamentos variem linearmente entre cada instante de tempo, escrevemos a seguinte equação diferencial de equilíbrio dinâmico para o instante t_n:

$$\mathbf{M}\,\ddot{u}_n + \mathbf{C}\,\dot{u}_n + \mathbf{K}\,u_n = \mathbf{R}_n \tag{4.60}$$

Seguindo as operações do Método das Diferenças Centrais, chegamos às equações de aceleração e de velocidade descritas a seguir:

$$\ddot{\vec{u}}_n = \frac{1}{\Delta t^2}(\vec{u}_{n+1} - 2\vec{u}_n + \vec{u}_{n-1}) \tag{4.61}$$

$$\dot{\vec{u}}_n = \frac{1}{2\Delta t}(\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_{n-1}) \tag{4.62}$$

As equações 4.61 e 4.62 aplicadas em 4.60 geram o seguinte sistema:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}\right)\{\vec{u}_{n+1}\} = \{\mathbf{R}_n^a\} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\{\vec{u}_n\} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\{\vec{u}_{n-1}\} \tag{4.63}$$

Como podemos notar, apenas as matrizes de massa e de amortecimento estão acopladas à variável deslocamento no instante t_{n+1} – que deve ser calculada para se passar ao próximo passo. Estas matrizes, conforme exposto, são concentradas e portanto

facilmente inversíveis. A matriz de rigidez, **K** , aparece do lado direito da igualdade – por estar multiplicando u_n – não necessitando, pois, ser invertida.

4.2.3. Análise Comparativa Entre Métodos de Integração

A correta escolha de um algoritmo deve ser feita de forma a alcançar o máximo aproveitamento de sua potencialidade e gerar resultados os mais próximos possíveis da solução exata.

Para bem executar tal escolha, conforme o problema a ser enfrentado, devemos estudar e avaliar algumas características dos algoritmos disponíveis. Dentre as principais, definimos as seguintes [RODRIGUEZ, 1996]:

i) Estabilidade - Um algoritmo é estável quando pequenas perturbações não são amplificadas ao longo do tempo, ou seja, quando a solução não dispersa para o infinito. Conforme as fontes de que advém, estas perturbações podem ser de dois tipos, a saber: a) erros de arredondamento, provenientes das aproximações feitas pelo computador, visto que ele não opera com números exatos ; b) erros de truncamento, advindos das aproximações efetuadas por cada método numérico, conforme suas hipóteses particulares. Para constatar a estabilidade, verifica-se o comportamento do algoritmo com $n \to \infty$ e $\Delta t = cte$, onde n é o número de passos e Δt é o tamanho do passo.

ii) Consistência - É dito consistente o algoritmo onde $|\tau(t)| \to 0$ se $\Delta t \to 0$, sendo $|\tau(t)|$ o erro de truncamento.

iii) Convergência - É convergente o algoritmo se $u_n \to u(t_n)$, quando $\Delta t \to 0$, onde $\Delta t = \frac{t_n}{n}$.

Em problemas como os que envolvem vibrações é recomendado o uso de métodos incondicionalmente estáveis, tal como o método de Newmark, uma vez que o passo pode ser escolhido conforme a precisão que se desejar. Estes métodos são muito sensíveis à convergência, não sendo recomendados em problemas com muitos graus de liberdade, como os dinâmicos que envolvam contato. Isto se dá porque há a necessidade de resolver um sistema de equações simultâneas. Estas equações, sendo acopladas, exigem iterações as quais aumentam muito conforme a complexidade da geometria e a conseqüente variação de contatos entre as partes. Portanto com o aumento dos graus de liberdade, exige-se cada vez mais memória do computador.

Com o uso de métodos explícitos, ganha-se em rapidez de processamento, pois, no processo numérico, não há demanda por inversão de matrizes. Assim, mesmo que haja um número de passos bastante elevado, a solução obtida é bastante eficaz. O problema deste método é que ele é condicionalmente estável, estando, pois, bastante limitado o tamanho máximo do passo de tempo usado. Apesar disto, há a vantagem de o tamanho do incremento ser indiferente às não-linearidades da análise, dependendo apenas de características das dimensões dos elementos mais refinados da malha e das propriedades do material simulado.

Capítulo 5

Simulação Computacional

Como já dito, o programa ANSYS/DYNA combina dois programas de análise por elementos finitos. Há a opção de processamento implícita e a explícita no tempo. A primeira está implementada no próprio processador do programa ANSYS, enquanto que a última advém do programa de solução do DYNA. Ambas as opções estão implementadas juntamente com o pré-processador e o pós-processador do programa ANSYS e serão experimentadas neste capítulo de aplicações.

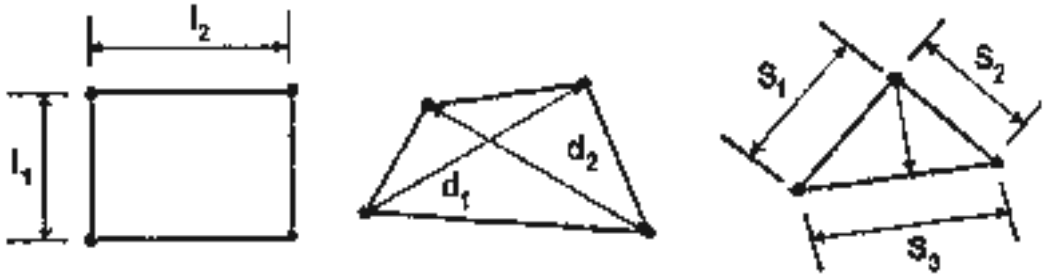
O método explícito, utilizado pelo processador do DYNA, é adequado para simulações que envolvam grandes não-linearidades, como operações de conformação mecânica de metais, problemas complexos de impacto e contato, etc. O código explícito promove soluções, em curto espaço de tempo, de problemas com múltiplas não-linearidades, visto que não necessita efetuar inversões de matrizes para chegar às resoluções. As equações do movimento são integradas no tempo através do Método das Diferenças Centrais, consoante apresentado na seção 4.2.2 .

Como visto, a desvantagem destes métodos ditos explícitos, é que todos eles são condicionalmente estáveis, ou seja, existe um valor limite no incremento do tempo, para que o método não perca a estabilidade e possa oferecer uma resposta acertada. Em um modelo de elementos finitos esse limite se trata do menor tempo necessário para que uma onda sonora elástica atravesse qualquer elemento da malha, ou seja:

$$\Delta t \leq \frac{l}{c} \tag{5.1}$$

onde Δt é o incremento de tempo, ou tamanho de passo crítico, c é a velocidade elástica do som neste material e l é uma característica das menores dimensões dentre os elementos mais refinados da malha.

Nos elementos lineares, l é o próprio comprimento; já em elementos bidimensionais, esta medida é variada, como se pode observar na figura a seguir:



$l=min(l_1,l_2)$ $l=A/max(d_1,d_2)$ $l=2*A/S_{max}$

Figura 5.1 – Comprimentos característicos em elementos bidimensionais, onde A é a área do elemento.

A espessura dos elementos de casca e as seções dos elementos de barra são ignoradas na busca da menor dimensão característica. Também os elementos rígidos são desprezados [HALLQUIST, 1996].

Define-se a velocidade de propagação elástica do som como:

$$c = \gamma \sqrt{\frac{E}{(1-\nu)\,\rho}} \tag{5.2}$$

sendo que E , é o módulo de Young , ρ , a densidade do material, ν é o coeficiente de Poisson e γ é um fator de redução, ou coeficiente de segurança.

Nos problemas lineares, o fator de redução vale *1,0* , enquanto que, nos problemas não-lineares, γ vem a ser – para elementos sólidos, de casca e de barra – aproximadamente *0,9* , de modo a garantir a estabilidade numérica [HALLQUIST, 1996].

Portanto, o passo de tempo crítico aumenta com o aumento do elemento. Da mesma forma, cresce com o aumento da massa específica, bem com a diminuição do módulo de Young .

Devido a esta restrição de tamanho de passo crítico, o número de passos, *N*, torna-se deveras grande, pois:

$$N = \frac{T}{\Delta t} \tag{5.3}$$

onde T é o período total do processo.

Para contornar esta dificuldade, normalmente são utilizados dois subterfúgios. O primeiro é o *fator de carregamento*, o qual consiste na aplicação da carga em tempo menor que o real. A segunda maneira, conhecida como *escala de massa*, consiste em diminuir a velocidade de propagação de ondas elásticas, através do aumento da massa específica, posto que a variação do módulo de Young mudaria essencialmente o comportamento do material; a massa específica influencia as forças de inércia, que no caso de uma estampagem são mínimas. Ambos os métodos são experimentados na simulação do embutimento presente neste capítulo.

Como a modelagem de processos de conformação utiliza-se da hipótese *quasi-estatica*, deve-se cuidar para que a técnica do *fator de carregamento* não diminua demais o tempo, pois senão o processo deixa de ser *quasi-estatico*. Um modo prático de se verificar isso é garantir que a energia cinética não ultrapasse 5% da energia total. Esta técnica obviamente não pode ser aplicada a materiais cuja tensão de escoamento dependa da velocidade de deformação.

A verificação da energia cinética máxima de 5% também deve ser feita quando usada a técnica da escala de massa. Contudo, esta técnica não tem restrições a materiais que dependam da taxa de deformação, uma vez que esta taxa não é afetada pela variação da densidade.

A conformação mecânica de metais, particularmente a estampagem, é considerada como um problema *quasi-estatico*, pois, as velocidades envolvidas são relativamente pequenas – em geral menores que 0,5 m/s – e, portanto, o tempo real de duração da operação acaba por ser grande, quando comparado ao máximo incremento possível devido às considerações de estabilidade.

Neste capítulo são oferecidas algumas exemplificações da modelagem computacional de processos de conformação mecânica de metais, utilizando-se de ambos os processadores. Inicialmente é modelado, sob o código implícito, o ensaio de compressão de cilindro curto entre batentes, apresentado na seção 2.2.2.1, de forma a confirmar a afirmação que diz não haver deformações nos locais próximos aos batentes; em seguida, sob o mesmo código, modelar-se-á um condutor sujeito às grandes deformações, com o intuito de verificar a forma de sua seção deformada. Sob o processador explícito, será apresentada detalhadamente a principal exemplificação deste trabalho, a saber, a modelagem de um processo de embutimento, ou estampagem profunda.

5.1 Modelagens Sob o Código Implícito

O processador do ANSYS foi usado em dois ensaios ilustrativos, apresentados a seguir. Ambos são experimentos de conformação mecânica de metais amplamente usados na prática.

5.1.1 Ensaio de Compressão de Bloco Curto Entre Batentes

O intuito deste exemplo é confirmar a afirmação da seção 2.2.2.1 , segundo a qual, num ensaio de compressão de cilindro, com atrito entre as partes, há uma região do metal indeformada, na região adjacente aos batentes – conforme mostrado na figura 2.8 .O modelo ora apresentado foi rodado pelo processador do ANSYS. Foi utilizado um modelo plano, com axissimetria de revolução visto que representa bem tal experiência.

Na figura, pode-se observar o contorno indeformado do cilindro e a sua estrutura deformada, após a compressão.

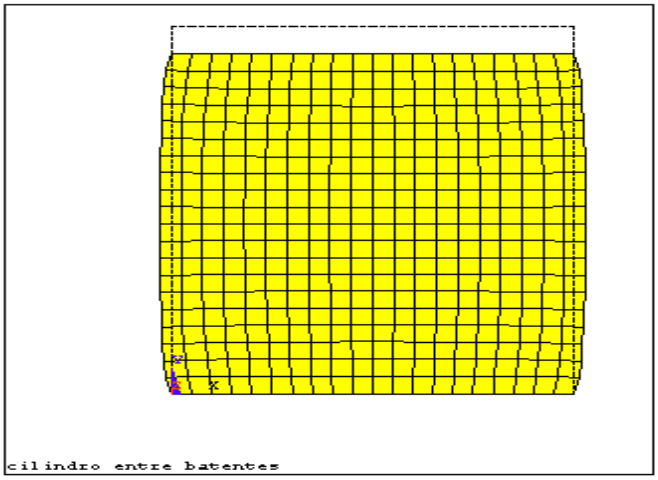


Figura 5.2 – Bloco deformado por compressão e contorno da sua estrutura indeformada.

A compressão do bloco foi feita através do travamento de todos os graus-de-liberdade de deslocamentos dos nós inferiores e pelo rebaixamento dos nós superiores, cujo deslocamento horizontal também foi impedido.

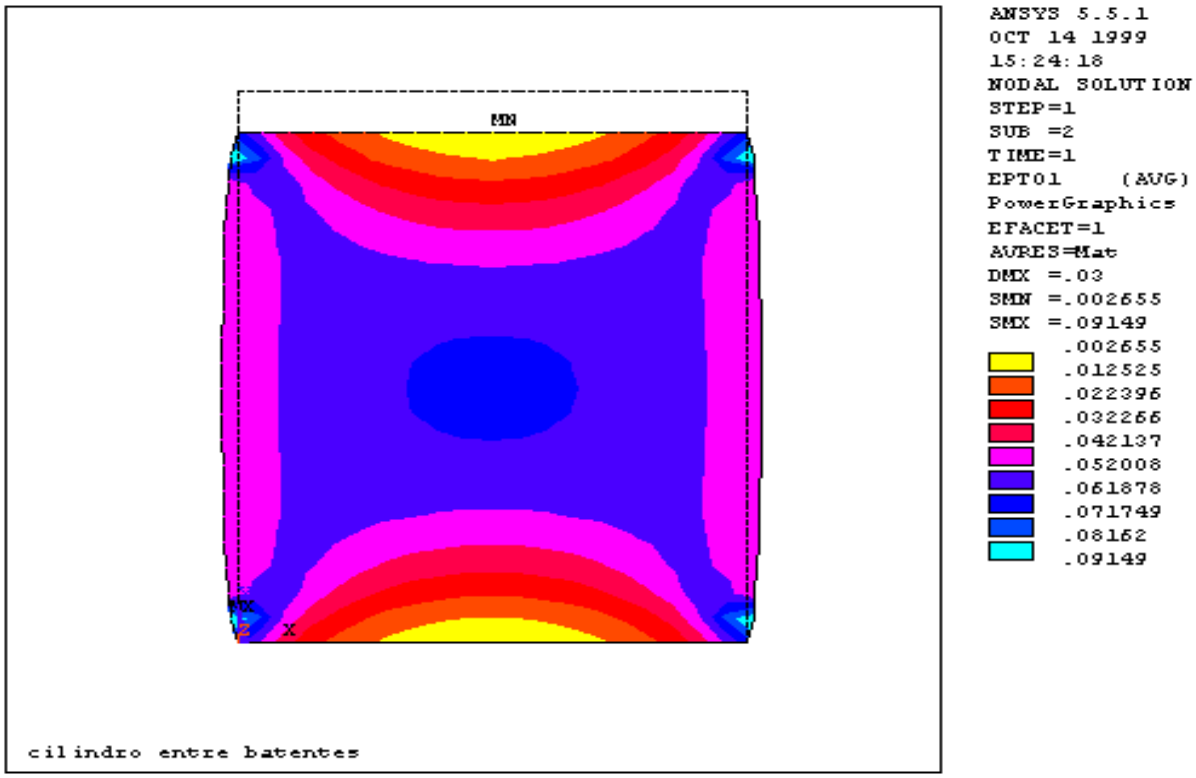


Figura 5.3 – Respostas nodais médias das deformações segundo a direção principal.

Como pode ser observado, as regiões próximas aos batentes – extremos superior e inferior – tem deformações quase nulas, tendendo a zero, conforme o ponto analisado se aproxima do centro de simetria do bloco.

Os resultados obtidos foram bastante coerentes, não havendo problemas de diferenciação entre as soluções por elementos e por média nodal, conforme pode ser analisado nas figuras seguintes:

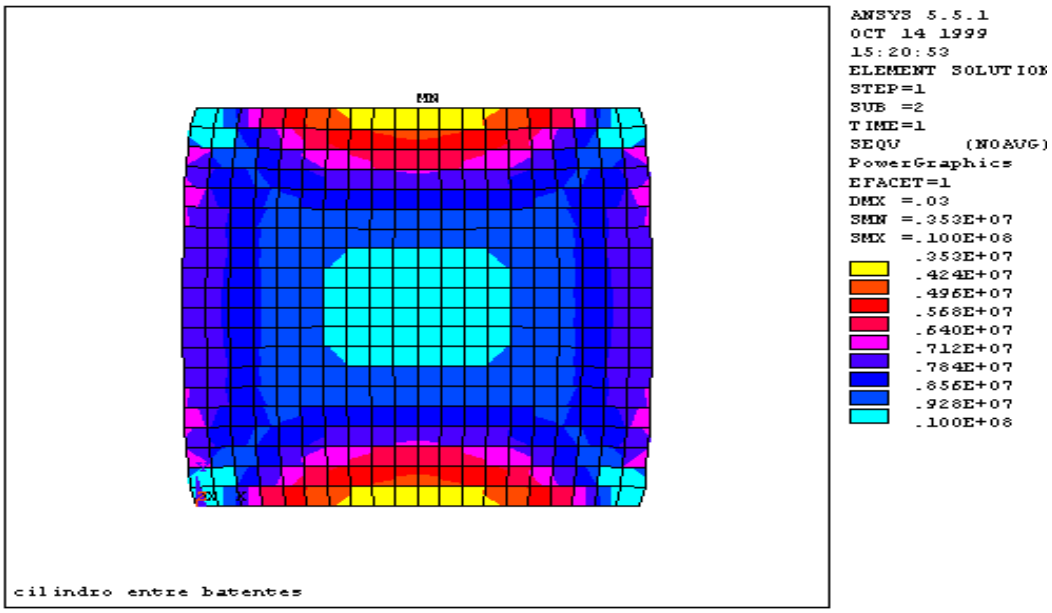


Figura 5.4 – Solução por elementos: tensões de Von Mises.

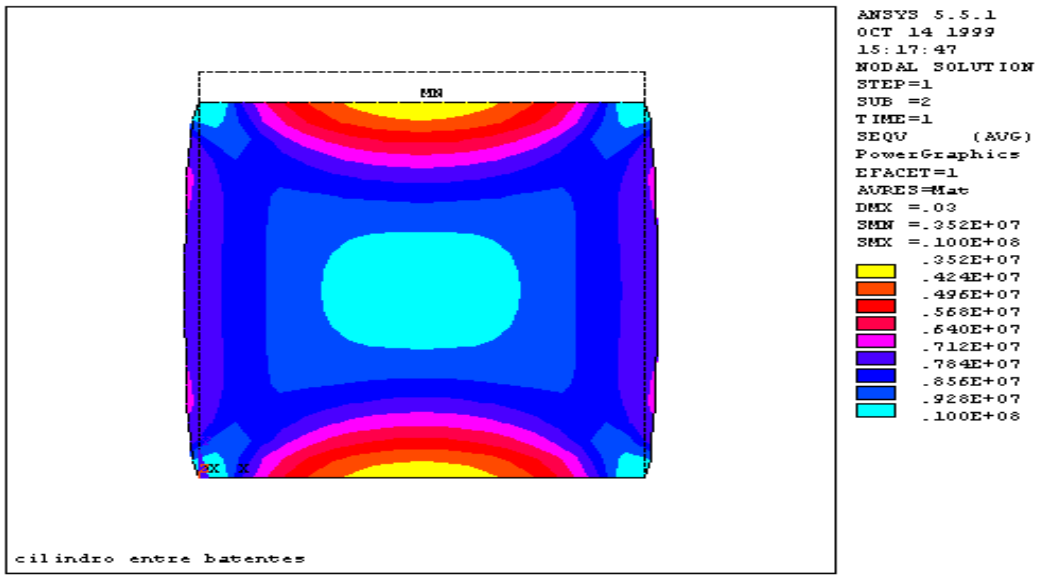
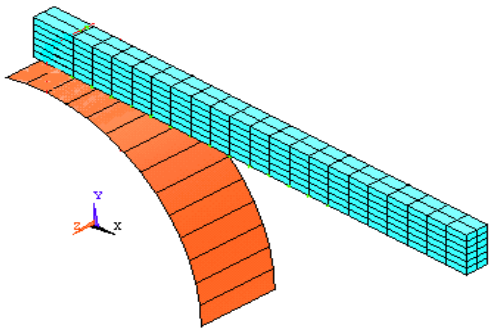


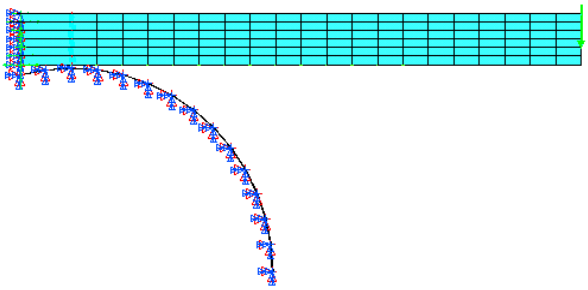
Figura 5.5 – Solução nodal: tensões de Von Mises.

A solução por elementos está bem próxima da solução nodal média, evidenciando que não há resultados destoantes entre elementos, sendo a continuidade obedecida, e a solução satisfatória.

5.1.2 Ensaio de Dobramento de Condutor

Esta modelagem visa analisar a forma da secção final de uma barra condutora de seção inicialmente retangular. O resultado será comparado ao obtido analiticamente por [PAULETTI,1998], através de cálculo geométrico, e que mostra que a forma da secção torna-se côncava. A simulação, feita sem atrito, corrobora esta solução analítica, conforme veremos. O modelo correspondente ao processo pode ser visualizado nas figuras seguintes:





Figuras 5.6 e 5.7 – Vistas do modelo correspondente ao processo de dobramento de barra, respectivamente, em perspectiva (geometria) e lateral (geometria, restrições e carregamentos)

O modelo é constituído por uma barra engastada em uma das extremidades e sujeita a um carregamento vertical para baixo concentrado na outra ponta. A barra se conforma curvando-se em torno da casca cilíndrica rígida.

Com o processamento implícito, foi conseguida a seguinte solução:

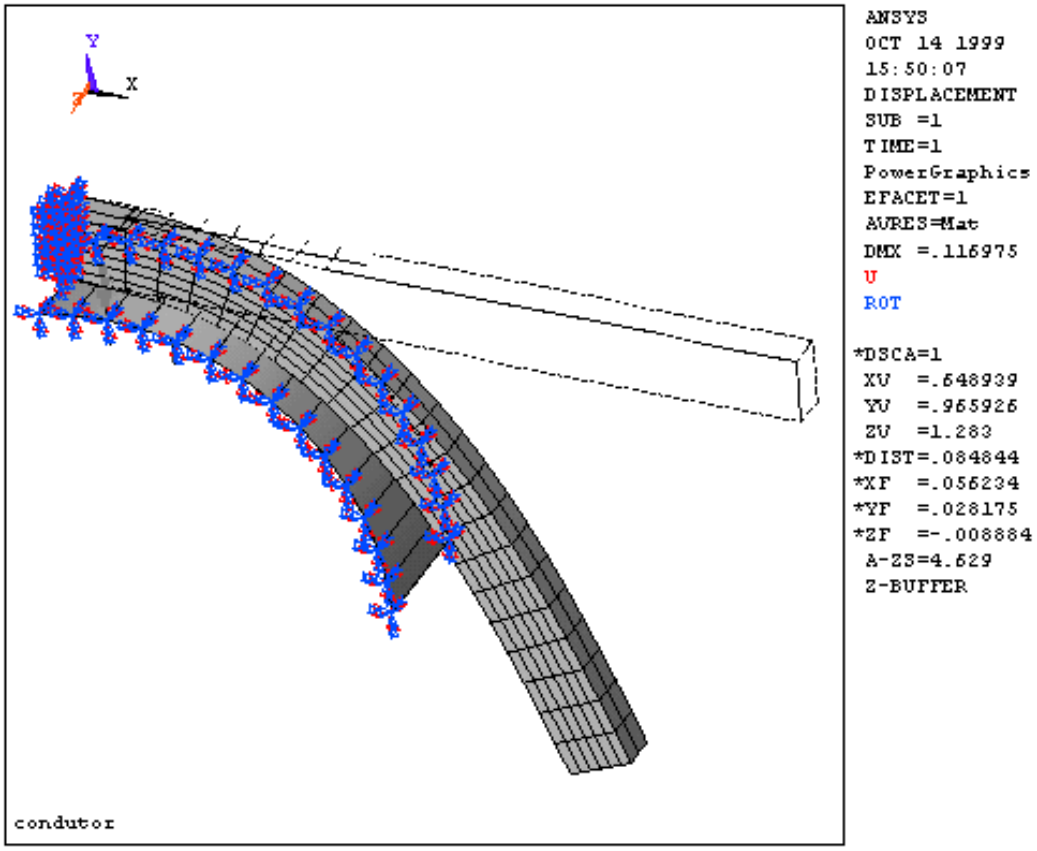
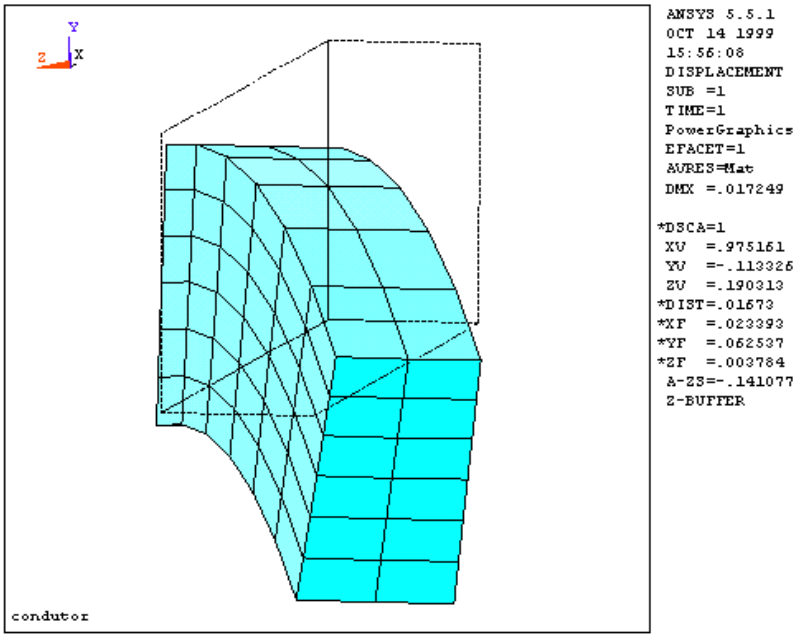
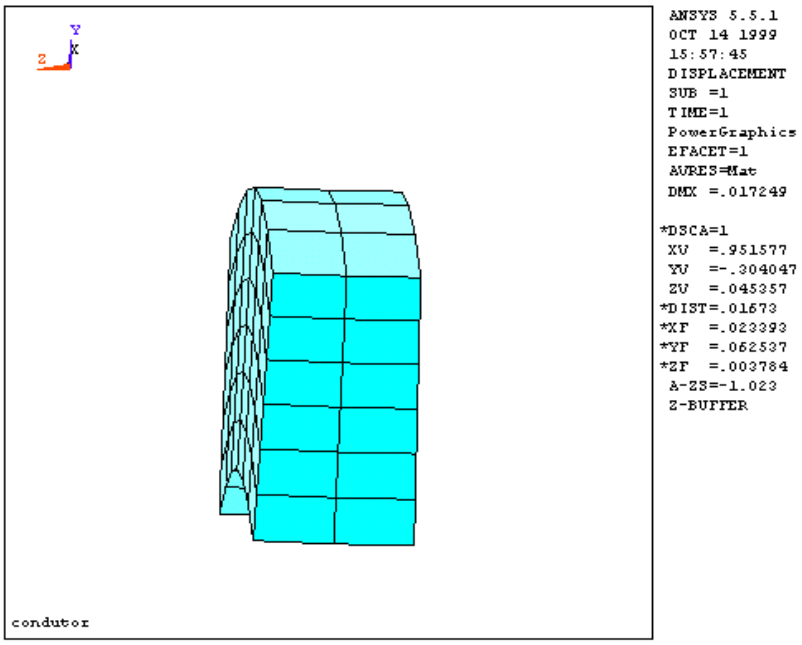


Figura 5.8 – Solução implícita do processo de dobramento: barra deformada, com as restrições dos graus-de-liberdade.

A partir desta estrutura deformada, foi selecionada uma parte, dentre as de maior curvatura, da barra condutora, que é mostrada em duas vistas, sendo que, na primeira, pode ser visualizado também o contorno da barra indeformada:



vista (a)



vista (b)

Figura 5.9 – Vistas da secção transversal de parte curva do centro da barra.

O gráfico, mostrado na figura abaixo, representa, nas ordenadas, as deformações, e nas abcissas, as distâncias percorridas num caminho definido segundo vertical da secção transversal, de baixo para cima. A secção calculada é a apresentada na figura anterior.

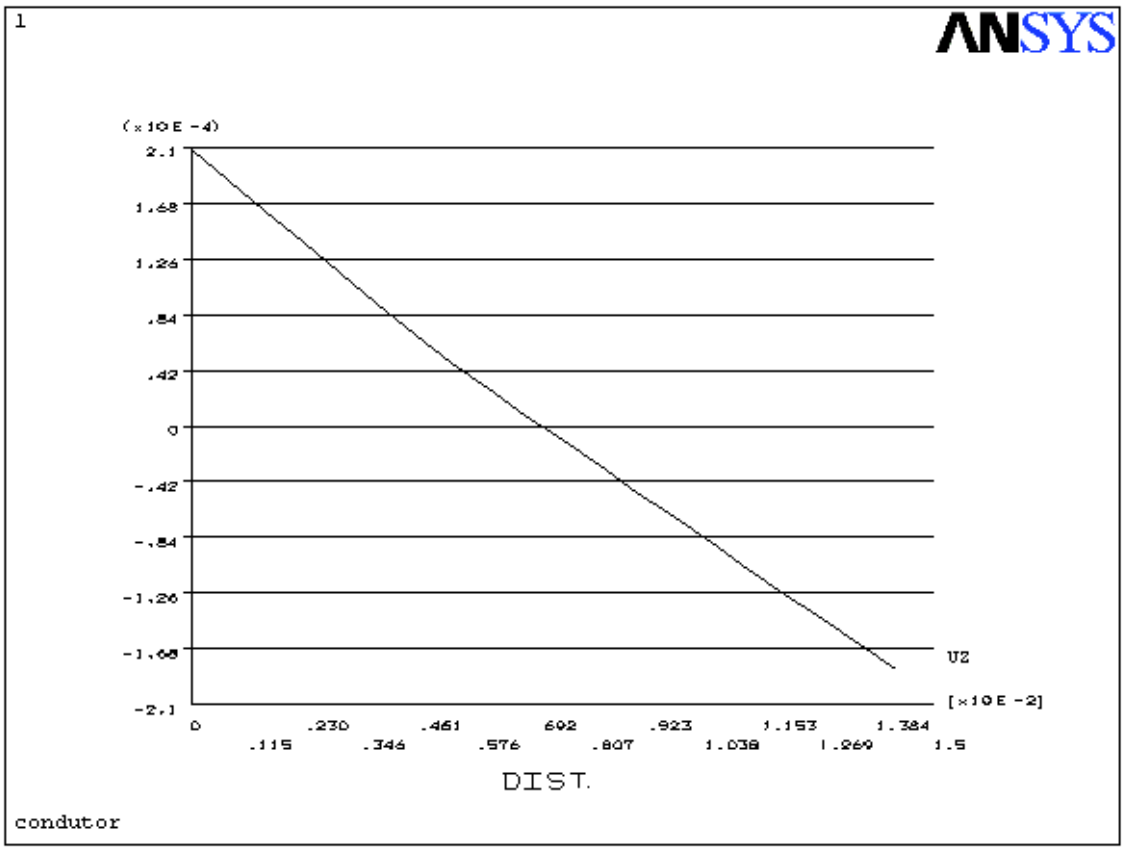


Figura 5.10 – Gráfico: deformação X distância vertical.

Como pode ser observado no gráfico, na base da secção transversal há uma deformação positiva de $2{,}1*10^{3}$. Esta deformação diminui rapidamente, conforme vai se caminhando rumo ao topo da secção transversal, até atingir o valor negativo de $-2{,}1*10^{3}$. Isto denota que as laterais da secção adquirem um formato côncavo, como era matematicamente esperado, em processos de dobramento sem atrito.

5.2 Modelagens Sob o Código Explícito

Para encerrar este trabalho, o processador do DYNA, recomendado para processos com contatos e deslizamento, é aqui usado para modelar os casos de estampagem profunda de chapas. Devido à sua simetria, foi modelado apenas um quarto do todo. Foram simuladas chapas de alumínio e de aço.

5.2.1 Descrição do Modelo e Hipóteses

O elemento usado para modelar todos os componentes do experimento (chapa e ferramentas) foi o de casca (shell 163), cuja formulação é a de Belytschko-Wong-Chiang. A formulação deste elemento se utiliza do Tensor das Tensões de Cauchy e do seu conjugado, o Tensor das Taxas de Deformação, o que facilita a determinação das relações constitutivas. Ambos os tensores foram apresentados no capítulo terceiro. A geometria do ensaio é composta por matriz, chapa, prensa-chapas e punção. Na seqüência de figuras, pode-se observar formas e discretizações por elementos finitos:

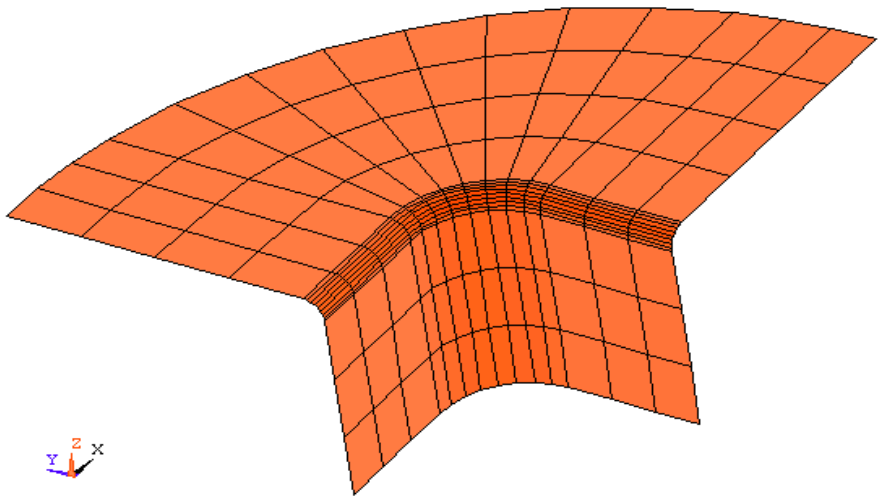


Figura 5.11 – Matriz de embutimento.

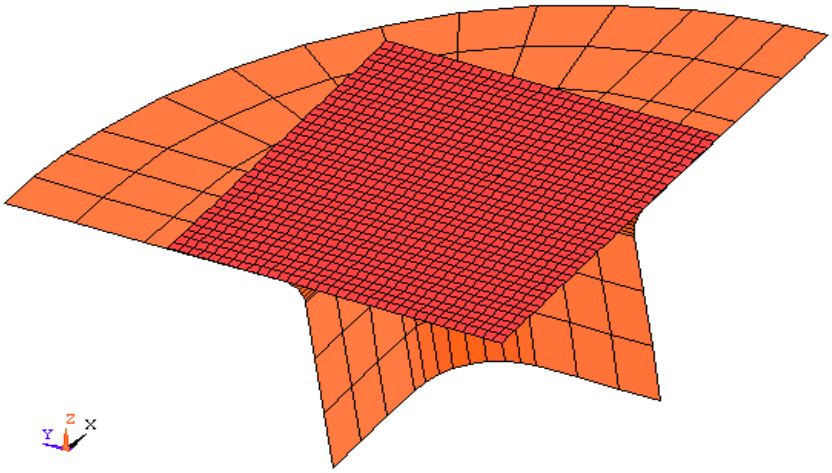


Figura 5.12 – Matriz de embutimento e chapa.

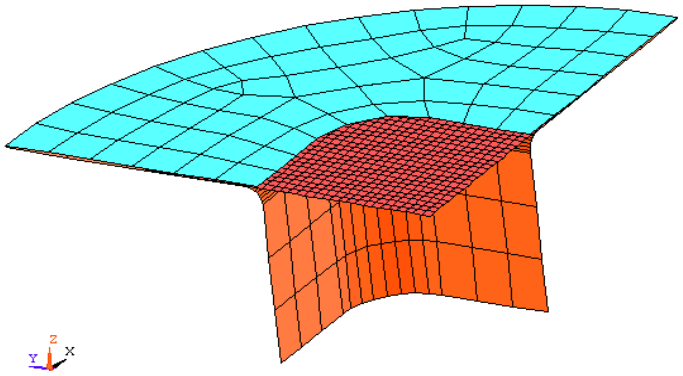


Figura 5.13 – Matriz de embutimento, chapa e prensa-chapas.

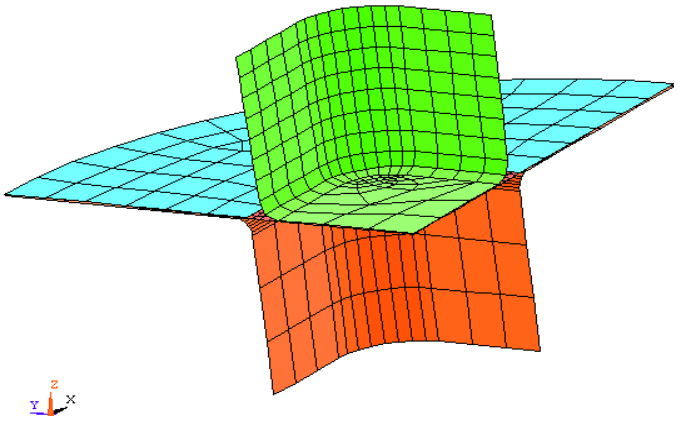


Figura 5.14 – Matriz de embutimento, chapa, prensa-chapas e punção.

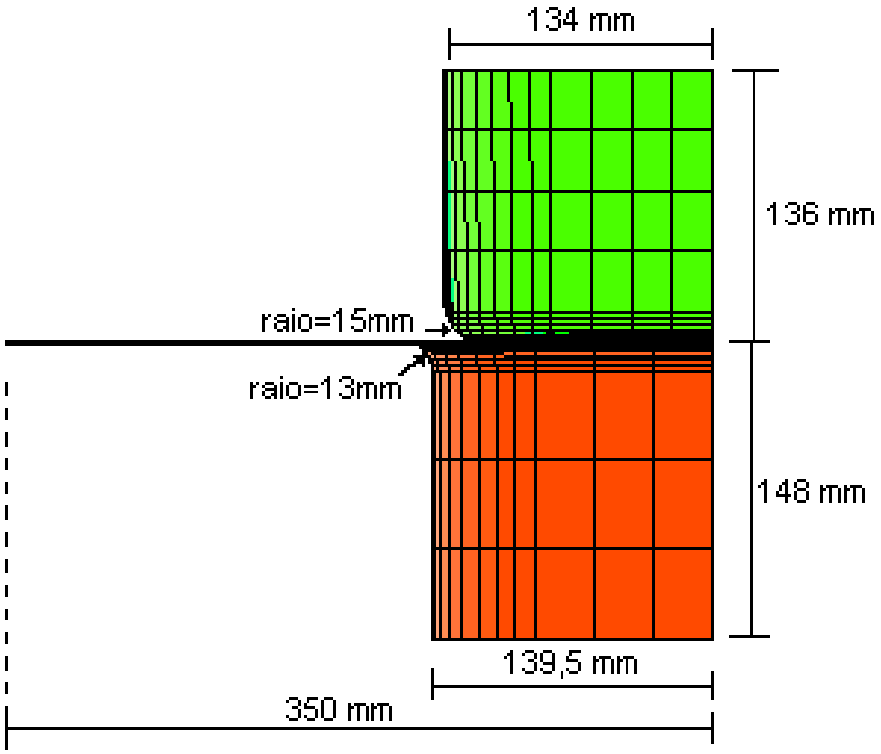


Figura 5.15 – Vista frontal : medidas das ferramentas.

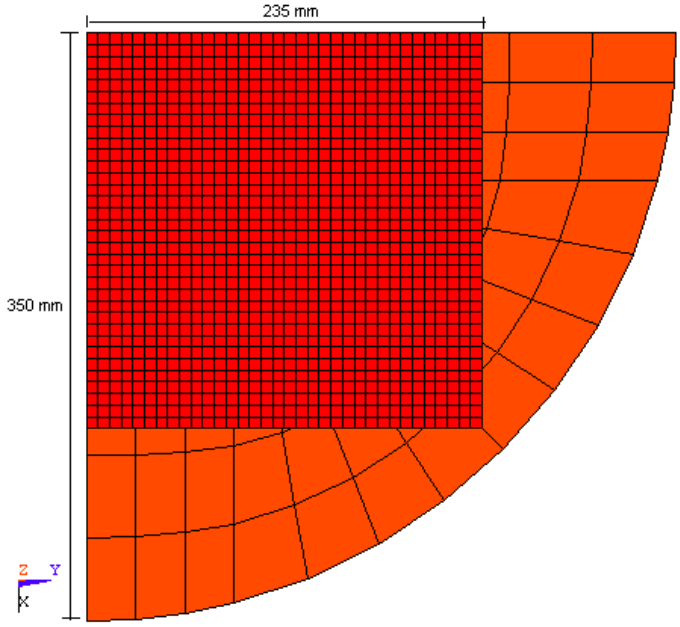


Figura 5.16 – Vista superior: medidas da matriz e da chapa.

Para as definições dos contatos foi utilizado o Método das Penalidades, e escolhida a opção do tipo *superfície-para-superfície*. Os contatos foram definidos respectivamente entre a superfície acoplada e a mestra, sendo: o primeiro entre a chapa e o punção; o segundo entre a chapa e o prensa-chapas; o terceiro entre a chapa e a matriz.

O punção, a matriz e o prensa-chapas foram simulados como corpos rígidos. O material da chapa foi modelado como sendo elasto-plástico bilinear-cinemático. A matriz foi travada em todos os graus-de-liberdade; às demais ferramentas foi permitido o deslocamento vertical, de forma que o punção descesse verticalmente, penetrando a matriz e embutindo a chapa. Uma força constante de 10 kN foi aplicada ao prensa-chapas, tanto na simulação da chapa de alumínio, como na de aço. No caso do aço, esta força foi depois aumentada.

O tempo da simulação foi de 0,1 segundos, apesar de que o tempo real levaria de 1 a 2 segundos. Isto é devido ao método do *fator de carregamento*, explicado no início deste capítulo. A velocidade do punção é variável, e pode ser observada segundo o gráfico de sua equação:

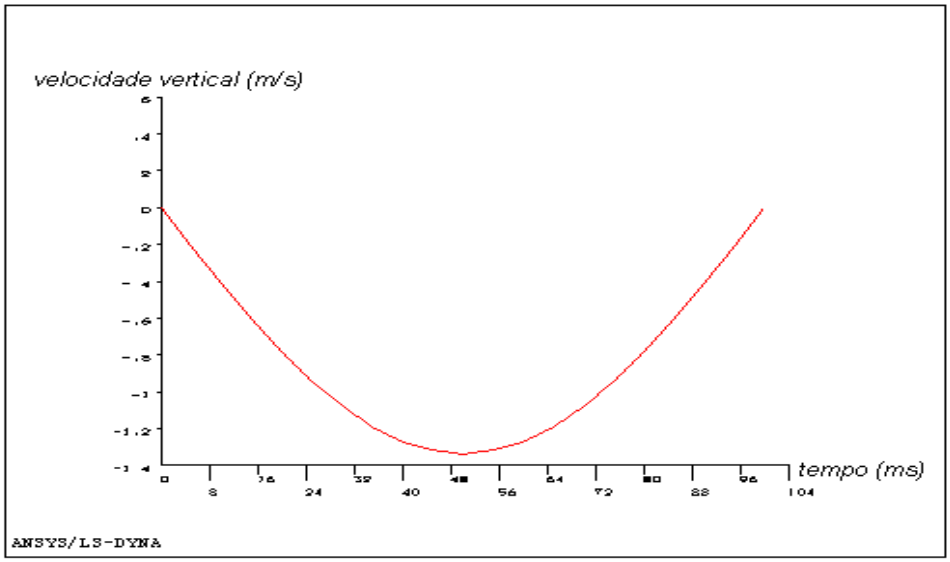


Figura 5.17 – Gráfico: *velocidade do punção* X *tempo*

5.2.2 Ensaios, Resultados e Análises

O modelo descrito na secção anterior é agora ilustrado e analisado, em ensaios computacionais de embutimentos de chapas de alumínio e de aço. Seus resultados serão comparados a dados de curvas obtidas empiricamente, bem como a outros trabalhos de simulação computacional.

5.2.2.1 Modelagem de Chapa de Alumínio

O primeiro ensaio refere-se à simulação da estampagem da liga de alumínio recozido 3003-O, cuja densidade usada foi a verdadeira, e vale 2710 kg/m^3. Foi suposto, de início, coeficiente de atrito estático igual a 0,1 e coeficiente de atrito dinâmico nulo. O Diagrama Limite de Conformação deste material foi comparado com os pontos obtidos mediante a simulação computacional. A tensão de escoamento dessa liga é de 42 MPa [TRAFICANTE, 1979]. A curva de plasticidade têm tangentes de elasticidade e de encruamento iguais, respectivamente, a *70 GPa* e *0,1 GPa*.

As primeiras imagens referem-se à animação do pós-processador-geral do programa ANSYS, que mostra seqüência em três estágios distintos do embutimento: inicial, intermediário e final. Note-se que a imagem correspondente ao estágio intermediário dá a falsa idéia de que teria havido penetração em excesso no contato entre a chapa e a entrada da matriz. Para tirar a teima foi capturada imagem relativa ao passo 50 (de um total de 100 passos), junto ao pós-processador-histórico, que fornece os dados em vários instantes da análise. A comparação provou que o problema estava mesmo no pós-processador de imagens, e não na análise ou entrada de dados.

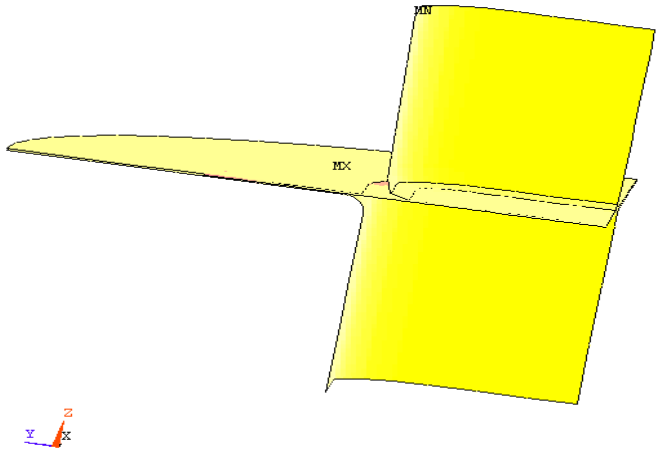


Figura 5.18 – Início da animação referente ao embutimento da chapa.

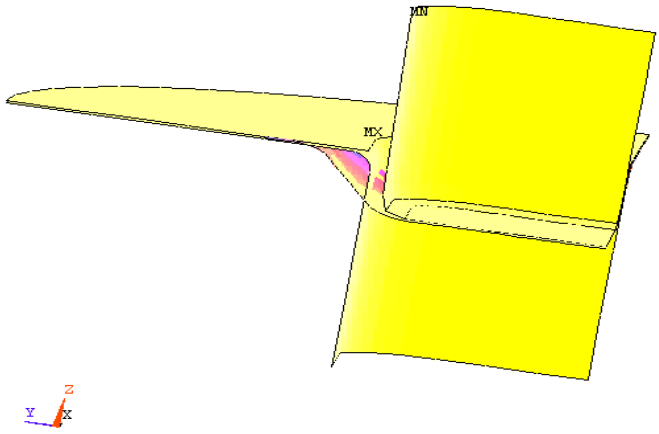


Figura 5.19 – Imagem defeituosa de etapa intermediária da animação.

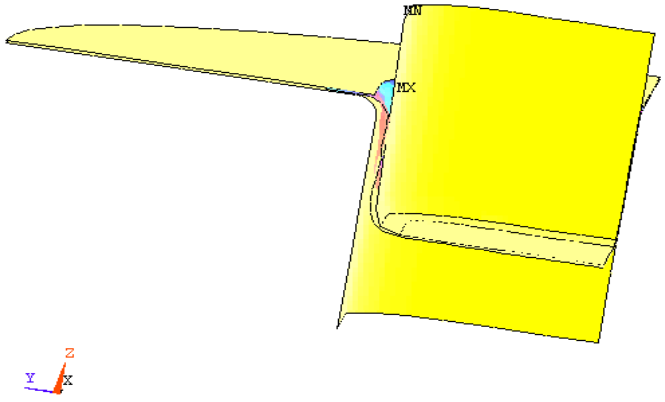


Figura 5.20 – Final da animação.

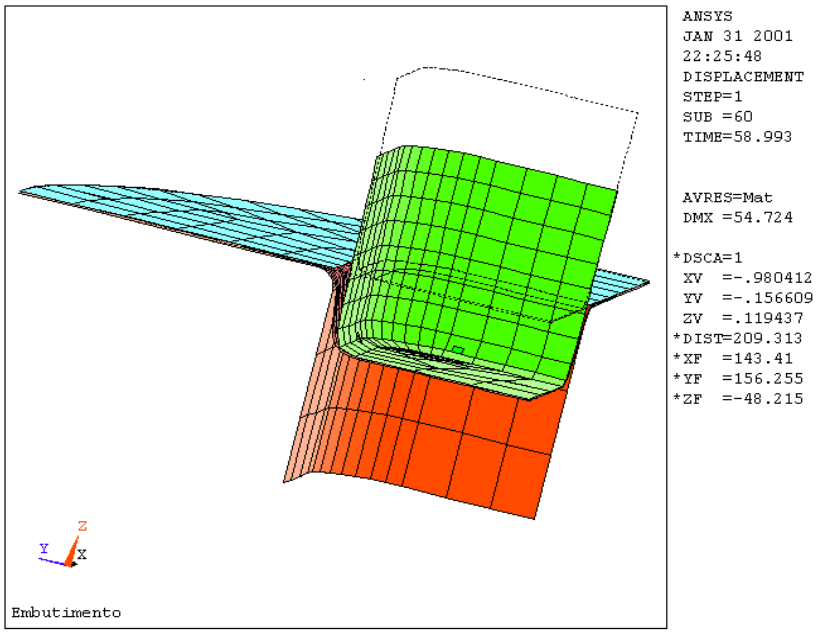


Figura 5.21 – Imagem correspondente ao passo 50, que mostra não ter havido excesso de penetração no contato entre a chapa e matriz.

As ilustrações a seguir referem-se aos valores da deformação de Von Mises, nodal média e por elementos, para verificação de semelhança. Pode-se observar que há coerência entre ambos os resultados.

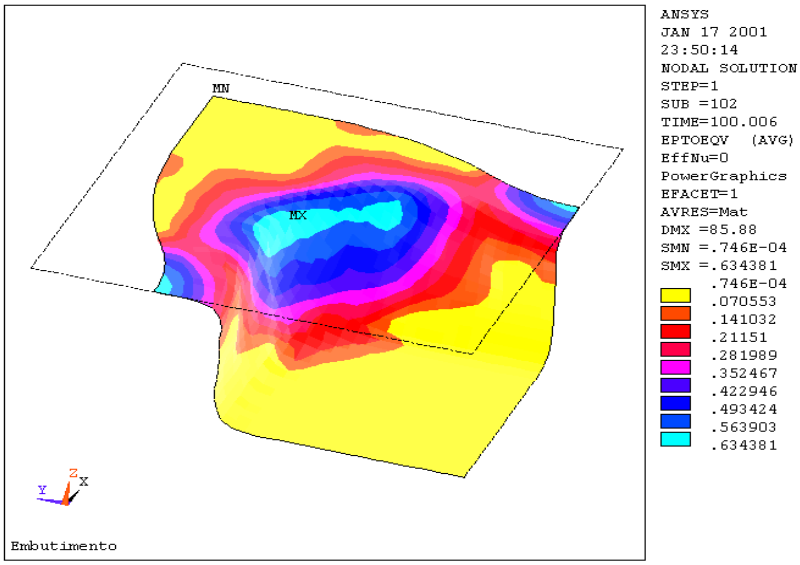


Figura 5.22 – Análise *nodal*: deformações de Von Mises

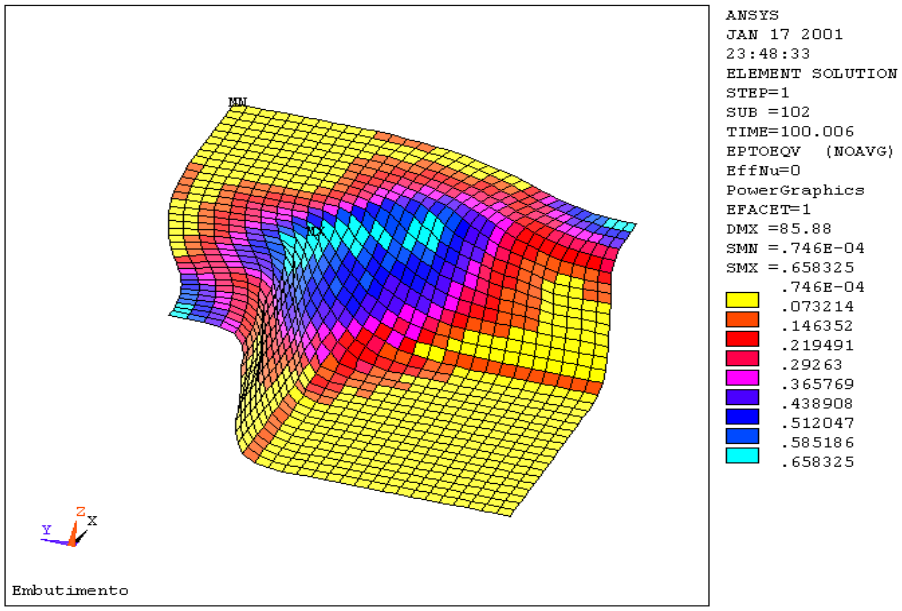


Figura 5.23 – Análise *por elementos*: deformações de Von Mises

Será agora apresentado, em detalhes, o estudo a respeito da deformação da espessura, de modo a avaliar os pontos críticos de redução, que são os locais onde poderá acontecer o empescoçamento, defeito descrito no capítulo segundo.

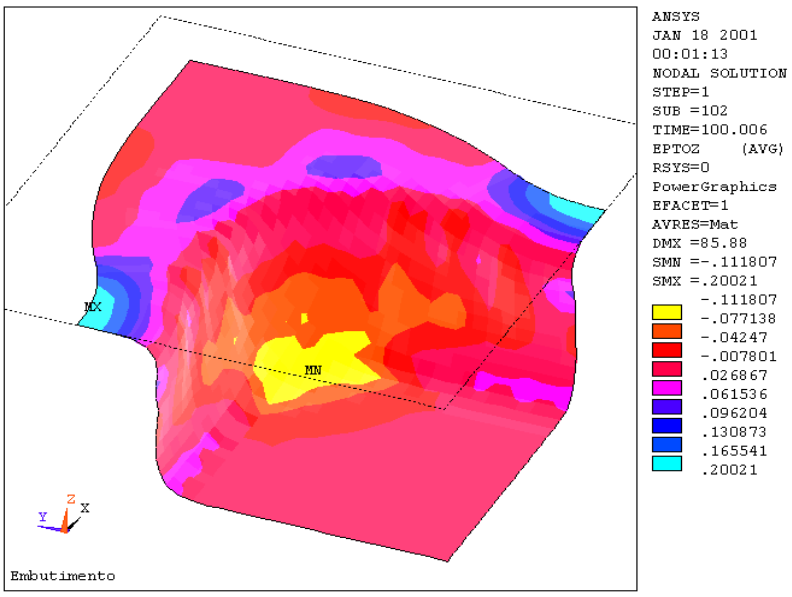


Figura 5.24 – Último estágio de deformação da chapa: valores da espessura.

Notemos que o pior caso de redução da espessura ocorre na região mais clara do centro da figura. Para melhor detalhar as variações de espessura, foram tomados grupos de nós para obtenção de valores. O primeiro grupo foi tomado paralelo a secção de simetria; o segundo foi tomado obliquamente a esta mesma secção, a 45º, passando pela região amarelada, a de pior caso. O primeiro grupo será designado por *raio paralelo*, enquanto o segundo será o *raio oblíquo*. A figura a seguir mostra o lugar geométrico destes grupos de nós. As duas seguintes ilustram os elementos de posições correspondentes a esses nós.:

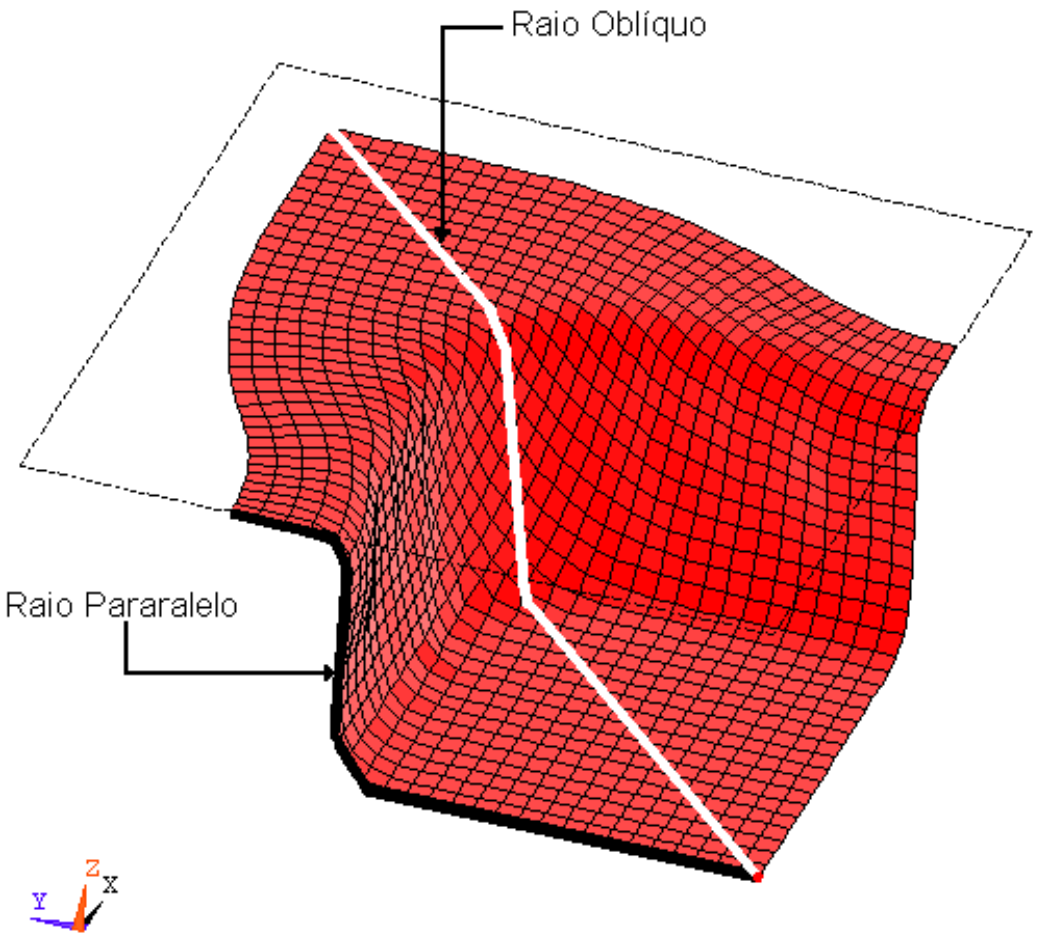


Figura 5.25 – Lugar geométrico dos grupos de nós “raio paralelo” e raio oblíquo”, usados no estudo das deformações.

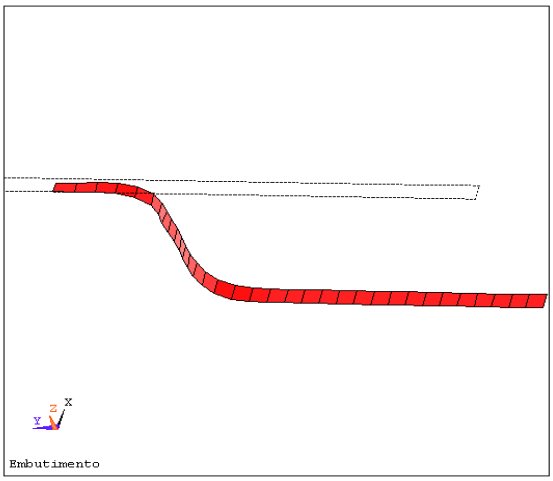


Figura 5.26 – Raio paralelo deformado e seu contorno indeformado.

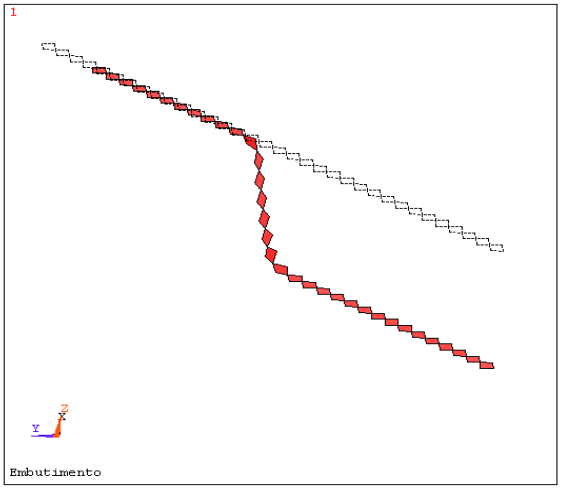


Figura 5.27 – Raio oblíquo deformado e seu contorno indeformado.

Analisemos, pois, as modificações da espessura com a variação de atrito. De inicio havia apenas o atrito estático, de coeficiente igual a 0,1. Foi então feita nova simulação com os seguintes coeficientes: atrito estático igual a 0,2 ; atrito dinâmico igual a 0,15. O tempo de processamento (em anexo) de ambos os casos foi muito próximo (por volta de 3 horas).

Comparando-se os valores nó a nó, para o grupo paralelo e oblíquo, obteve-se os seguintes gráficos, cujas tabelas estão em anexo:

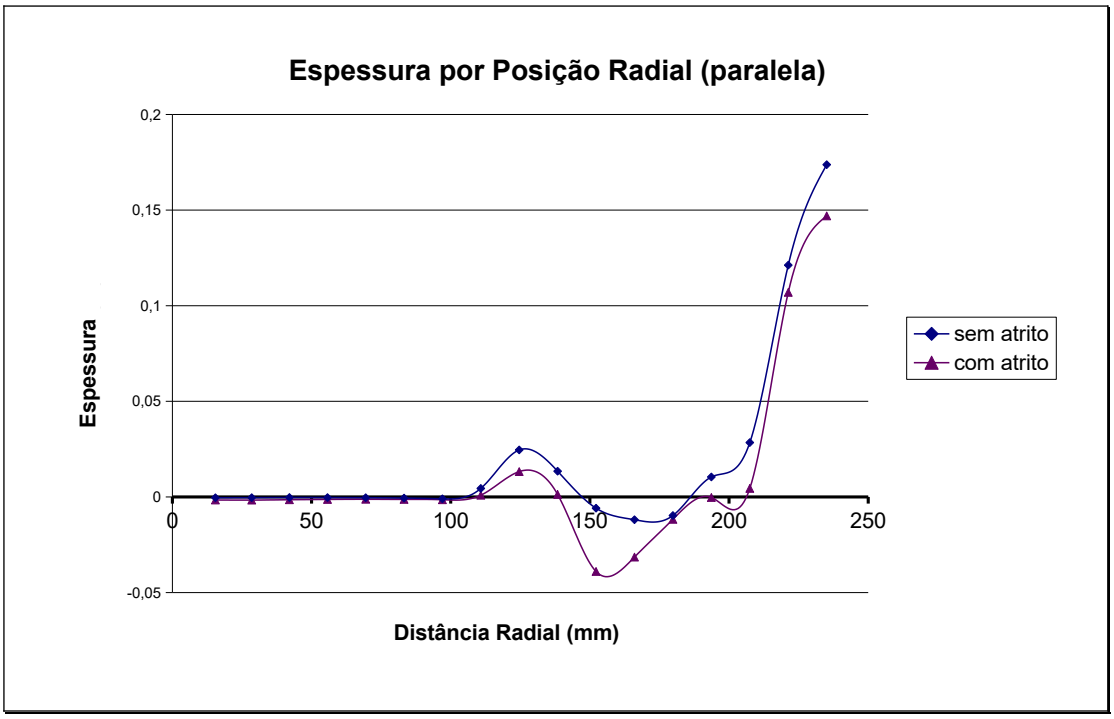


Figura 5.28 – Gráfico: variação de espessura ao longo do raio paralelo do copo.

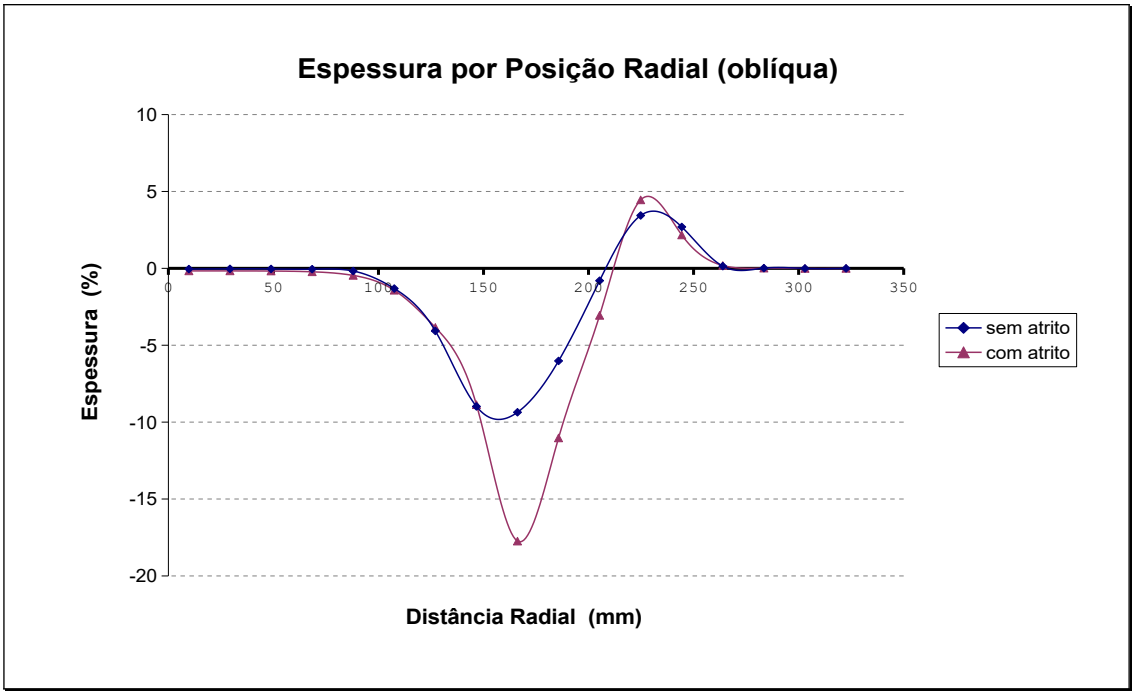


Figura 5.29 – Gráfico: variação de espessura ao longo do raio oblíquo do copo.

Com os valores nó a nó do pior caso, que ocorre no grupo de nós do raio dito oblíquo (conforme gráfico da figura 5.26), foi feito, então, esboço da variação de espessura ao longo do copo embutido:

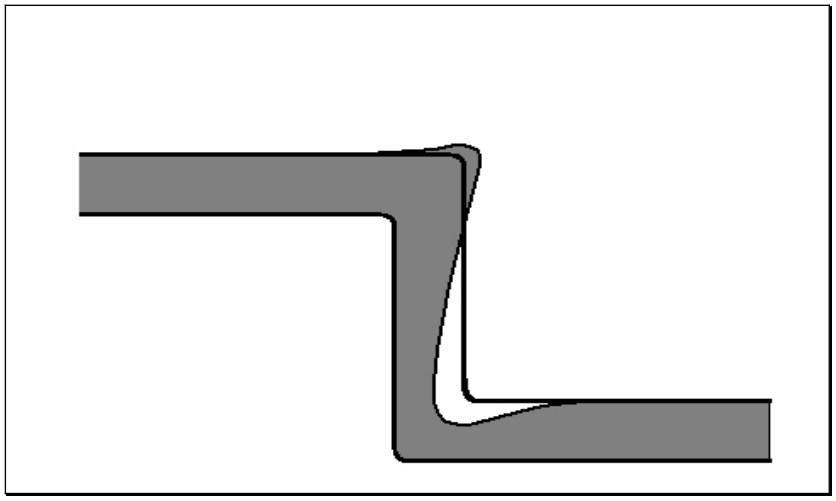


Figura 5.30 – Esboço exagerado de variação de espessura ao longo do raio oblíquo do copo: região hachurada corresponde à deformada.

As variações mais intensas acontecem na curvatura entre o fundo e a parede do copo embutido. Este local é onde costumam ocorrer a maioria dos casos de ruptura em estampagens profundas, conforme apresentado em esboço da figura 2.6 [PEARCE, 1991]. Devido ao grande número de variáveis, não é possível, analiticamente, determinar precisamente essas variações de espessura, sendo necessárias simulações.

A figura a seguir mostra resultados do trabalho de BUTTON [1999], sobre a simulação de embutimento de copo cilíndrico feitas sob o processador implícito do ANSYS, com variações de atrito dinâmico. Apesar da geometria, no caso, possuir simetria de revolução e ser, então, um tanto diferente da deste trabalho (cujo formato do copo é aproximadamente quadrado, com vértices arredondados), podem ser observadas semelhanças importantes, especialmente no tocante ao local das reduções de espessura. A resposta do modelo mostrou dois pontos de redução drástica de espessura bastante próximos. Este resultado é mais parecido com aquele obtido para o

grupo de nós dito paralelo. No caso dos nós do raio oblíquo, houve acentuadamente uma única redução de espessura, que por sua vez englobou toda a região tida como a mais problemática, e local de ambas as reduções do ensaio do copo cilíndrico.

Um argumento para a diferenciação entre os resultados obtidos neste trabalho, para os dois grupos de nós, está no fato de que os nós do raio oblíquo estão em local de curvatura acentuada na direção circunferencial, ao contrário dos nós do raio paralelo.

Vejamos, pois, os dados do ensaio de estampagem do copo cilíndrico:

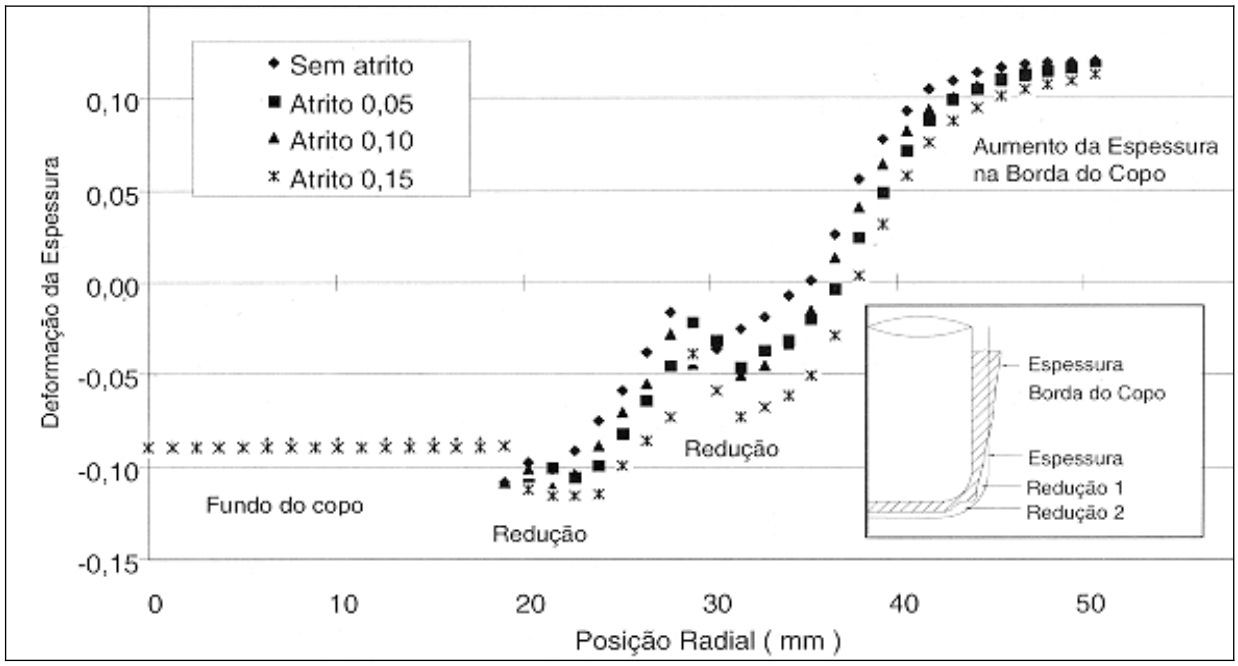


Figura 5.31 – Simulação de deformação de espessura para vários coeficientes de atrito [BUTTON, 1999].

Foram testados os seguintes coeficientes de atrito dinâmico: nulo; *0,05* ; *0,10* ; *0,15*. Observe-se que os casos com maior atrito são realmente mais críticos, como pode ser notado também nos gráficos das figuras 5.28 e 5.29.

O diagrama limite de conformação, técnica metalúrgica apresentada no segundo capítulo, foi feito segundo os dados do grupo oblíquo de nós. Tomou-se como

base a curva limite obtida em TRAFICANTE [1979]. Foram comparados os casos com e sem atrito dinâmico, ambos com coeficiente de atrito estático de valor 0,1. Nas abcissas foram locados, não somente os dados referentes a deformação secundária (ε_2), a menor no caso plano de deformações e que corresponde ao uso corrente, mas também os dados da menor deformação (ε_3). Isto para mostrar que o pior caso se dá realmente com os valores do par ordenado ($\varepsilon_2, \varepsilon_1$).

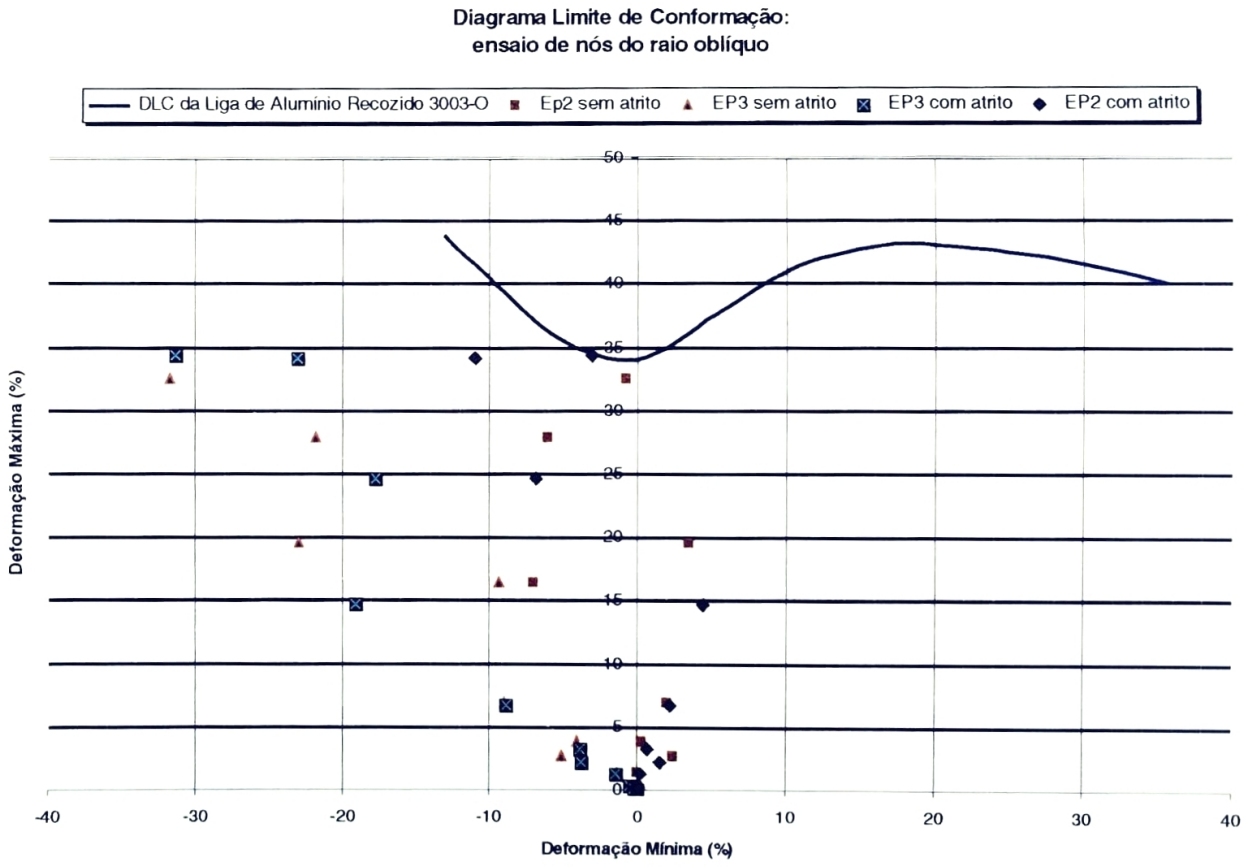


Figura 5.32 – Diagrama Limite de Conformação

O único ponto realmente problemático corresponde ao nó situado entre o fundo e a parede do copo, conforme ilustra o esboço da figura 5.27. Este ponto se refere ao caso com coeficiente de atrito dinâmico. O ponto crítico do caso sem atrito dinâmico

também chegou próximo à curva limite. Por medida de segurança, haveria que se melhorar a lubrificação para se reduzir também o atrito estático. Outra maneira de se resolver o problema seria usar uma outra liga de alumínio sujeita a tratamento, o que elevaria a curva limite, afastando-a dos pontos críticos. Talvez o material utilizado esteja realmente trabalhando próximo de seus limites nesta operação de estampagem profunda em um estágio, necessitando, pois, aumentar-se o número de estágios.

A variação da força efetuada pelo punção foi também posta em gráfico, tanto para o caso sem atrito, como com atrito, confirmando que o valor máximo se dá em etapa intermediária da estampagem profunda, conforme estudado na secção *2.2.1* desta dissertação. A máxima força atingida no caso sem atrito foi de cerca de 12 kN. No ensaio com atrito atingiu-se 15,8 kN – tabelas em anexo.

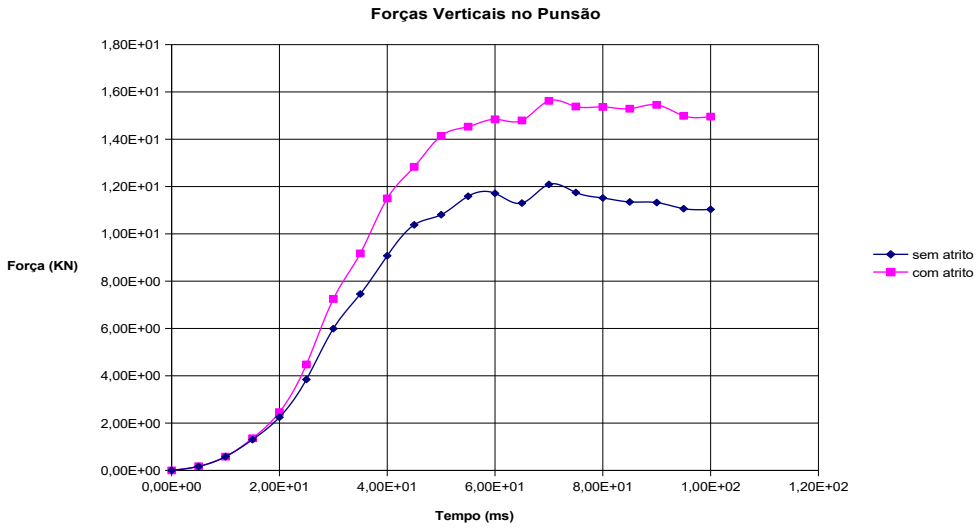


Figura 5.33 – Variação de Força no Punção: com e sem atrito dinâmico.

5.2.2.2 Modelagem de Chapa de Aço

Procedeu-se, pois, a variação do material, visando experimentar as diferenças de rigidez entre materiais e suas influências nos esforços externos. Substituiu-se os valores do alumínio pelos do aço, cuja densidade é 7850 kg/m^3 e cuja tensão de escoamento é de 800 MPa, sendo um material muito mais resistente, portanto. Foram usados os seguintes valores de tangentes para a curva de plasticidade do aço: módulo de elasticidade de 210 GPa; módulo de encruamento de 20 GPa.

Além deste ensaio, com a densidade verdadeira, foi feito outro, quadruplicando-se a densidade do aço, fazendo, portanto, uso do método da escala de massa, já apresentado no início deste quinto capítulo. No caso em que se usou a densidade verdadeira, o tempo de processamento ficou em torno de 3 horas e 8 minutos. Com o uso da escala de massa este tempo caiu para 1 hora e 42 minutos (densidade multiplicada por quatro). As forças no punção variaram muito de um caso para o outro. No primeiro caso a força atingiu 102 kN, enquanto no último caso a força chegou a 154 kN. Esta variação provavelmente se deve às forças de inércia que deixaram de ser desprezíveis, pois o prensa-chapas com sua força mantida igual a 10kN (como era para o caso do embutimento da chapa de alumínio) não resistiu ao aço, e cedeu. Desta forma a chapa se soltou e ganhou velocidade e, por conseguinte, forças de inércia. Este experimento comprovou o que foi afirmado na secção 2.2.4.2 a respeito do enrugamento causado pela baixa pressão de fixação do prensa-chapas. A força de fixação necessária para a chapa de alumínio é muito menor que a necessária para o aço.

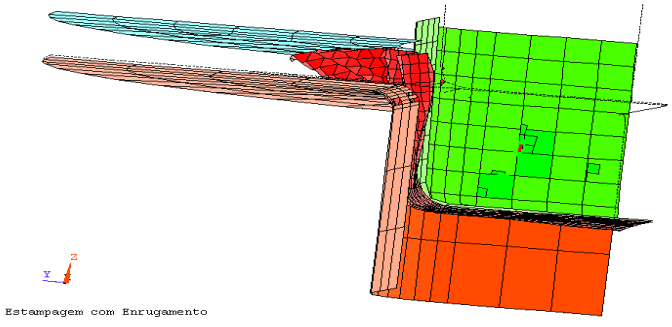
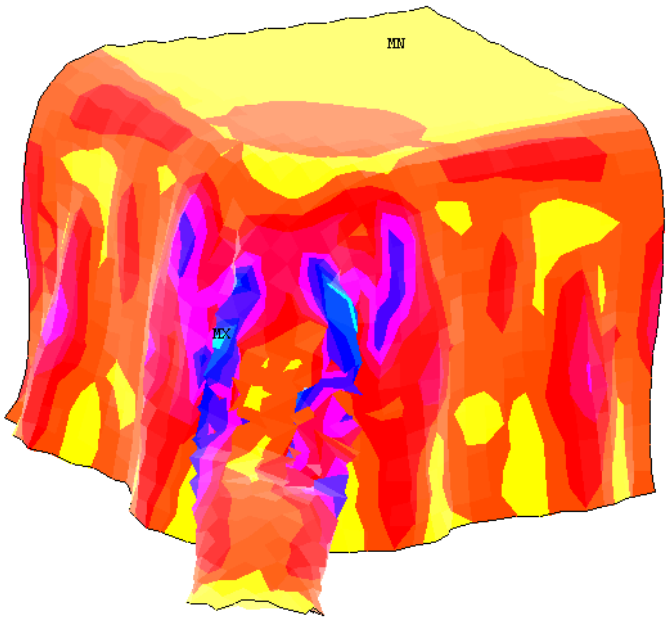


Figura 5.34 – Prensa-chapas com baixa carga de fixação.



vista (a)

vista(b)

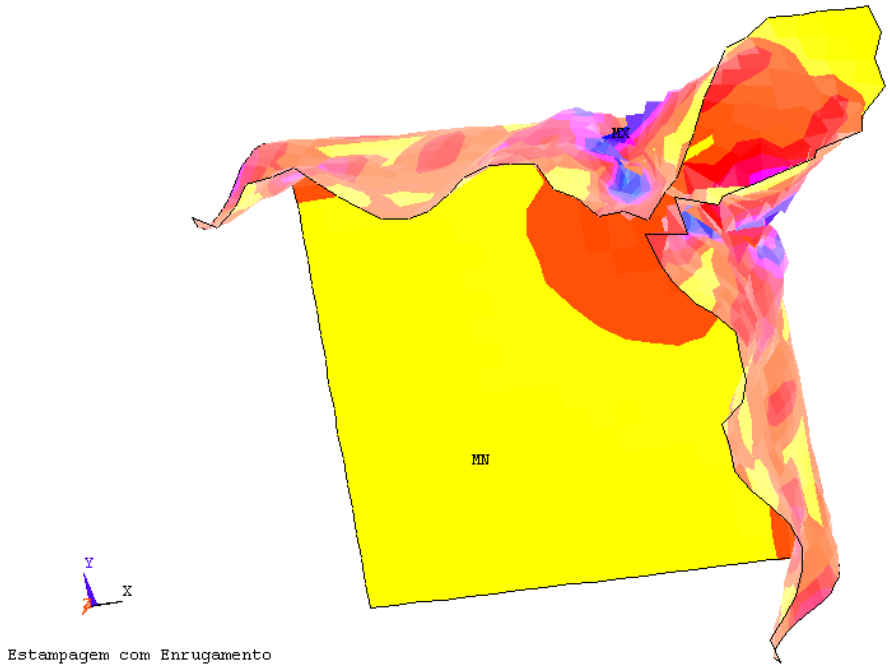


Figura 5.35 – Rugas: deformações de Von Mises

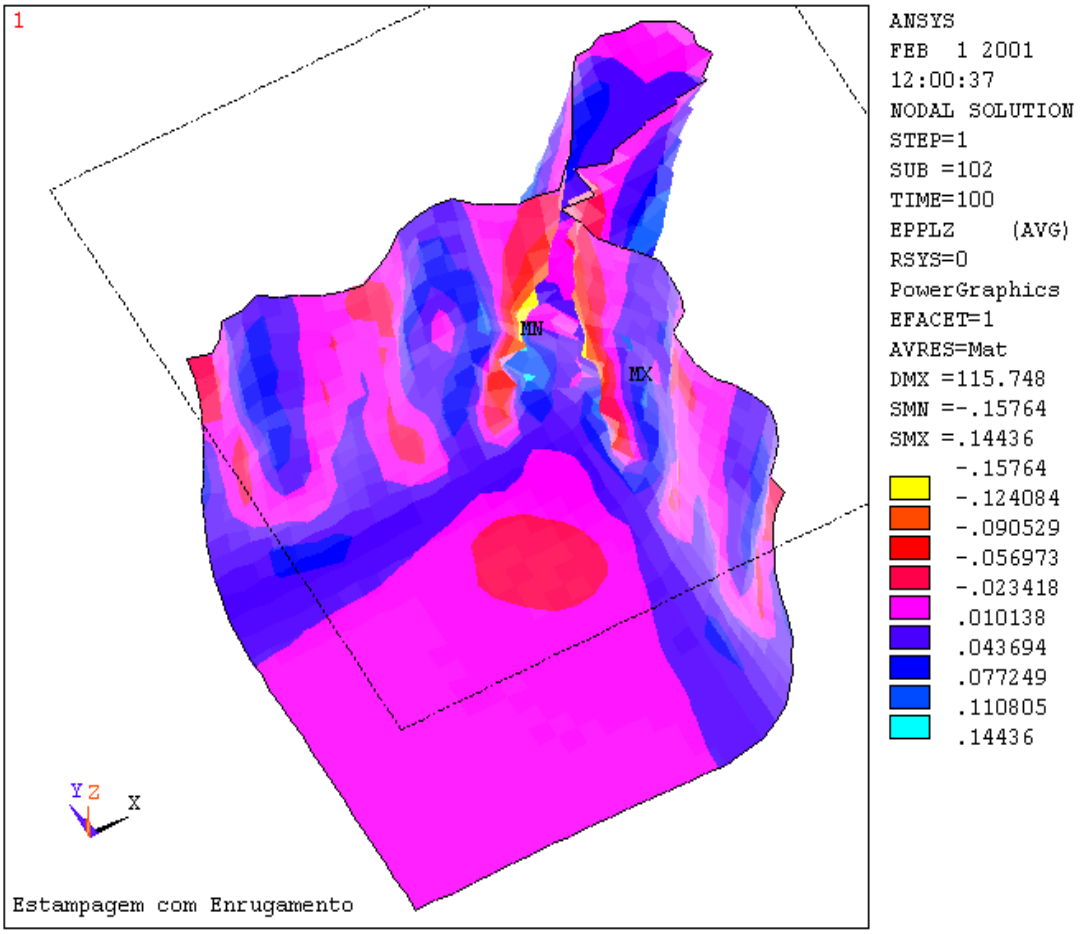


Figura 5.36 – Rugas: deformações da espessura

Um dos modos de se resolver o problema do enrugamento, como visto no capítulo segundo, é mediante o aumento da força de fixação do anel prensa-chapas. Num primeiro teste, elevou-se a força de 10kN para 300kN, o que se revelou insuficiente para eliminar as rugas, apesar do prensa-chapas ter se mantido em sua posição.

Na figura a seguir podemos ver as rugas, embora menores, da chapa de aço:

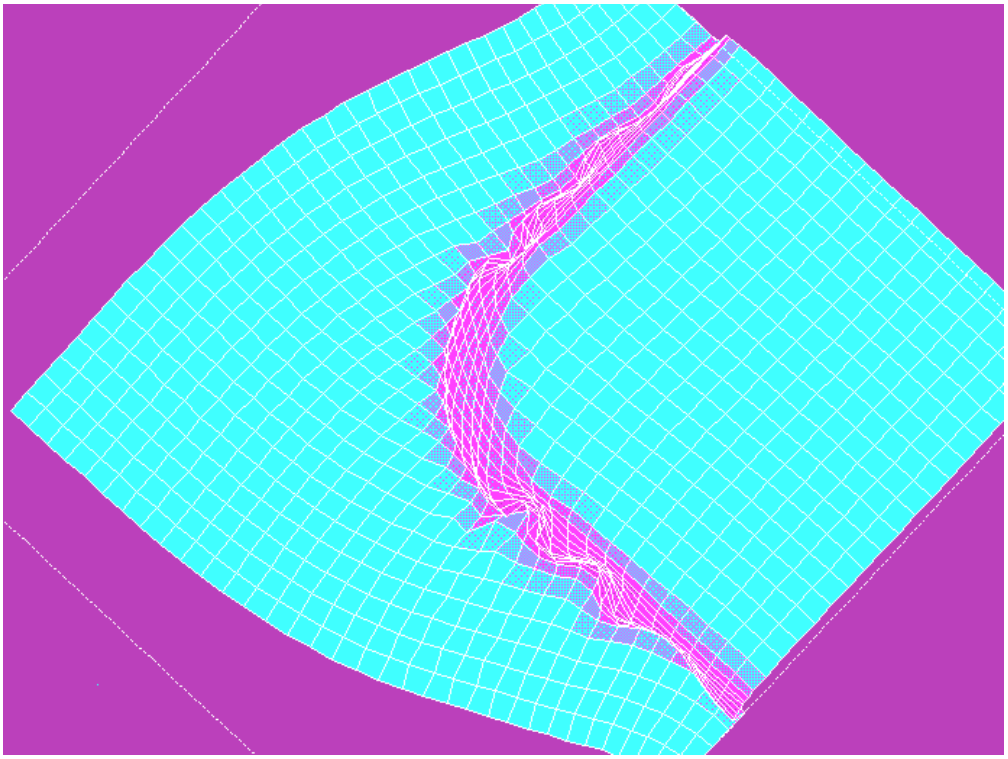


Figura 5.37 – Rugas: força do prensa-chapas de 300kN

Foi feito ainda ensaio utilizando força de fixação de 1000kN, o que seria, na prática, inviável, como já o era a força de 300kN. Os resultados mostraram que as rugas, embora menores ainda, não desapareceram.

Devido a grande resistência do material, seria necessário que se tomassem outras providências para o sucesso da estampagem. Dentre as saídas possíveis, há: inclusão de ranhuras no prensa-chapas; estampagem em mais de um estágio; diminuição de folga entre o punção e a matriz; mudança de geometria do punção e da matriz.

Vejamos as deformações desta última análise:

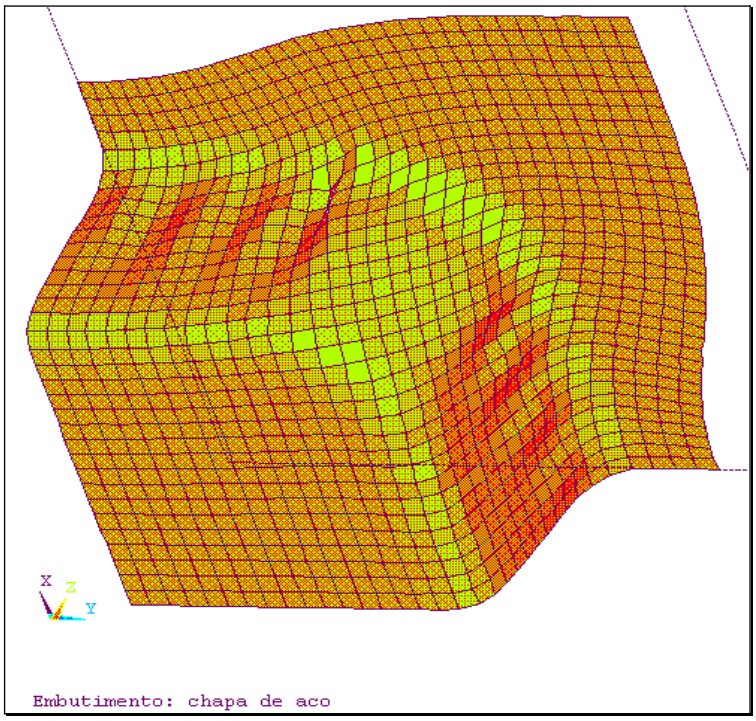


Figura 5.38 – Rugas: força do prensa-chapas de 1000 kN

A força do punção atingiu 822kN. Sua evolução é mostrada no gráfico abaixo:

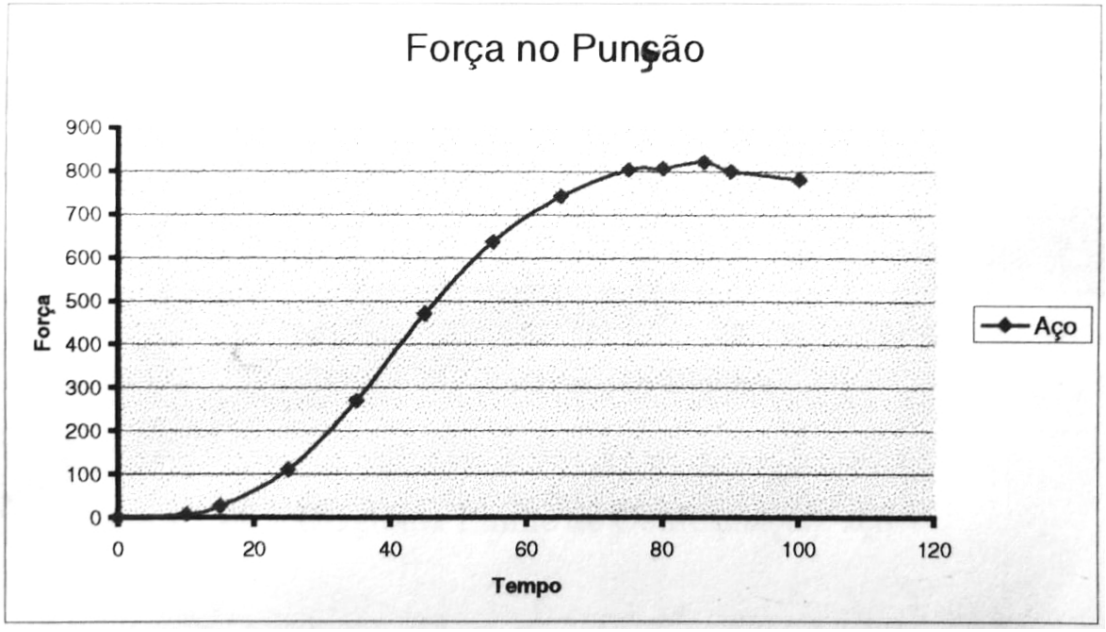


Figura 5.39 – Gráfico: força X tempo

O Diagrama Limite de Conformação, para este caso, foi efetuado segundo os limites obtidos em TAYLOR [1988], apresentados no segundo capítulo (figura 2.17). Os resultados denotam que não houve problema de fratura ou estricção, estando todos os pontos bem abaixo dos limites de segurança.

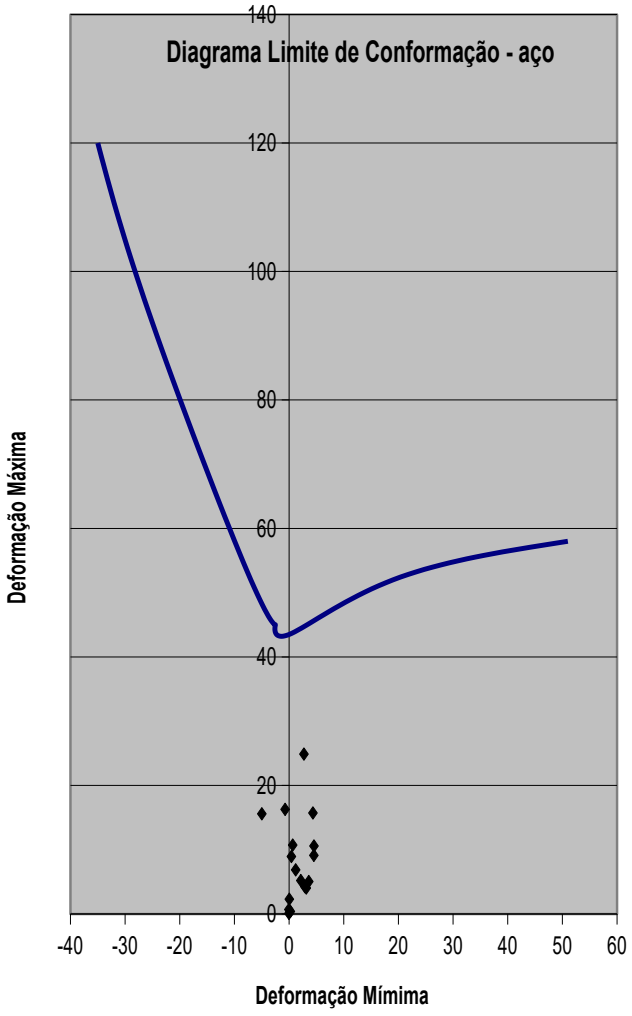


Figura 5.40 – Diagrama Limite de Conformação: aço

Capítulo 6

Conclusão

Os ensaios de simulação computacional de processos de conformação mecânica de metais apresentados nesta dissertação se mostraram adequados, visto a coerência e a correspondência de seus resultados com a realidade operacional estudada. No caso da estampagem profunda, exemplo principal deste trabalho, o processador do DYNA mostrou-se eficaz para sua simulação. Nestes processos de conformação, onde estão presentes grandes não-linearidades geométricas, de material e de contatos, o processador explícito no tempo, com equações desacopladas, era realmente o mais recomendado.

Encontrou-se alguma dificuldade no uso dos recursos do código explícito do DYNA dada escassez de bibliografia específica e de exemplos de aplicação disponíveis. Não obstante, espera-se ter atingido um resultado positivo no intento de facilitação do estudo nesta área de tão recentes pesquisas.

Técnicas de modelagem, como o fator de carregamento e a escala de massa, foram postas em prática, sendo bastante úteis para viabilizar, em cerca de minutos, processamentos cujo tempo natural de rodagem seria de algumas horas. Desta forma foi possível executar muitas variações do modelo.

O ensaio do embutimento foi exposto detalhadamente. Foram testadas chapas de alumínio e de aço, sob diferentes condições de lubrificação. As respostas da simulação foram analisadas segundo os métodos tecnológicos usuais. Os resultados relativos às deformações foram analisados graficamente, conforme as técnicas

metalúrgicas. Assim, verificou-se, em cada caso, a variação de espessuras no copo embutido, sendo também efetuado o Diagrama Limite de Conformação, que proporcionou informações a respeito de possíveis locais de fratura ou estricção.

Segundo o diagrama limite, constatou-se que, no caso da chapa simulada de alumínio, havia pontos do copo embutido propensos a possíveis falhas na operação real, principalmente no caso com maior atrito. Para se resolver este problema, poder-se-ia proceder de vários modos, como, por exemplo, melhorando a lubrificação ou efetuando o processo de conformação em mais de um estágio.

O gráfico das espessuras *versus* posição radial denotou a ocorrência de afinamento entre o fundo e parede do copo, como de fato a tecnologia mostra que acontece, sendo um dos principais locais de rupturas, na prática.

No caso da simulação da chapa de aço, foi observado um dos problemas descritos no capítulo acerca da conformação mecânica de metais, a saber, o enrugamento. Isto se deveu ao fato do prensa-chapas, no teste da chapa de aço, ter sido mantido sob a mesma força de fixação que fora usada para o alumínio, que é um material de muito menor resistência. À guisa de experimentação, aumentou-se a força do prensa-chapas até o valor exacerbado de 1000 kN, o que, na prática, seria por demais oneroso. Isto reduziu bastante o problema, mas não o resolveu por completo. Portanto, neste caso, seriam necessárias outras providências, como por exemplo as seguintes sugeridas: inclusão de ranhuras no prensa-chapas de forma a diminuir a força necessária no punção; estampagem em mais de um estágio; mudança da geometria do punção e da matriz, de forma a evitar a perda de contato da chapa embutida com um dos lados; redução da folga entre a matriz e o punção.

Para a melhoria das simulações efetivadas, pode-se seguir diversos caminhos. No entanto este não era o escopo deste trabalho, que se limitou a apresentar de forma geral e didática a tecnologia existente e a teoria em que ela está baseada. Neste sentido, procedeu-se, conforme proposto, a uma uniformização de nomenclaturas técnicas e teóricas, bem como de simbologias. Foi exposta a tecnologia disponível e toda a teoria básica para a simulação de um processo de conformação mecânica de metais, desde a

mecânica dos sólidos deformáveis, aos métodos numéricos de discretização do contínuo no tempo e no espaço. A conclusão é de que a simulação se mostra, cada vez mais, uma ferramenta importante ao desenvolvimento científico.

De toda forma, àqueles que pensem em iniciar seus estudos nas ciências, cabe ainda uma advertência. O desenvolvimento da simulação, se bem utilizado, poderá contribuir com o desenvolvimento humano de muitas formas. Contudo não devemos crer, de modo positivista, que estamos cá num passo para mapear a felicidade dos homens ou a sua melhor forma de existência. Devemos sim pensar que se for feito um uso dialético, reflexivo e humano da técnica, cada vez mais aperfeiçoada, então esta ciência poderá vir a constituir parte de uma verdade maior, muito além da verdade de sua lógica interna, a saber, a real evolução do ser humano, pois que além da ciência está a sabedoria, como além do animal, está o homem.

O uso que se tem feito, até então, da ciência é bastante preocupante. Há que se parar de pensar os meios e que se refletir a respeito dos fins. E o termo “fins” deve ser tomado num sentido amplo e crítico, tal qual uma meta à qual pretendemos assintoticamente nos aproximar, sem nunca atingi-la, pois que crer em um “fim da história” é um grande engodo, aliás, muito em voga. Em números absolutos, a população de desprovidos das mais básicas condições de vida aumenta a cada dia, embora já se houvesse condições materiais e científicas para se reverter este processo há muitos anos. Parece que o que ainda falta, não é mais tanto a ciência, mas a consciência. É chegada a hora de pararmos de conviver com o medo e o horror. Devemos transformar as estruturas decadentes, de modo a proporcionar, não apenas que se possa existir no raso, mas que se possa viver em toda a sua plenitude. É este o sentido da ciência, é este o seu dever para com a sabedoria.

Bibliografia

-AL QURESHI, H. A.. **Processos e Mecanismos da Conformação dos Metais**, São José dos Campos, ITA, 1991.

-BORTOLUSSI, R.. **Simulação do Processo de Estampagem Profunda de Corpos Cilíndricos Através do Método dos Elementos Finitos**, Campinas, Dissertação - Unicamp, 1996.

-BRESCIANI Filho, E.; Zavaglia, C.; Button, S.; Nery, F.; Gomes, E.. **Conformação Plástica dos Metais**, Campinas, Ed. Unicamp, 1991.

-BURNET, D. S.. **Finite Element Analysis: From Concepts to Applications**, Whippany (EUA), Addison-Wesley Publishing Company, 1987.

-BUTTON, D. S.. "Estudo do Processo de Embutimento Profundo de Copo Pelo Método dos Elementos Finitos", em **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas** (v. 21), Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Campinas, 1999.

-CHEN, W. F.; Han, D. J.. **Plasticity for Structural Engineers**, Donnelley and Sons, Harrisonburg (EUA), 1988.

-CHENG, J-H.; Kikuchi, N.. **An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic-Plastic Formulation**, North Holland, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (v. 49), 1985.

-CHIAVERINI, V.. **Tecnologia Mecânica** (v. II), São Paulo, ed. Mc Graw-Hill, 1986.

-CHUNG, T. J.. **Continuum Mechanics**, Englewood Cliffs (EUA), Prentice-Hall, 1988.

-COIMBRA, A. L.. **Novas Lições de Mecânica do Contínuo**, São Paulo, Ed. Edgard Blucher Ltda, 1981.

-DIETER, G. E.. **Metalurgia Mecânica** (2ª ed.), Rio de Janeiro, Ed. Guanabara, 1981.

-EARY, D. F.; Reed, E. A.. **Techniques of Pressworking Sheet Metal**, Englewood Clifs, Prentice Hall, 1958.

-FAGAN, H.. **Finite Element Analysis: Theory and Practice**, Harlow, Longman, 1992.

-GALLAGHER, R. H.. **Finite Element Analysis: Fundamentals**, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1975.

-GUO, Y. Q.; Batoz, J. L.; Detraux, J. M.; Duroux, P.. **Finite Element Procedures for Estimations of Sheet Metal Forming Parts**, International Journal for Numericals Methods in Engineering (v. 30), Nova Iorque, John Wiley and Sons Inc., 1990.

-GURTIN, M. E.. **An Introduction to Continuum Mechanics**, Nova Iorque, Academic Press, 1981.

-HALLQUIST, J. O.. **LS-DYNA/3D Theoretical Manual**, Livermore, L. Software Technology Corporation, 1993.

-HALLQUIST, J. O.. **LS-DYNA/3D User's Guide**, Livermore, L. Software Technology Corporation, 1996.

-HORKHEIMER, M.; ADORNO, T. W.. **Dialética do Esclarecimento**, Rio de Janeiro, Editora Zahar, 1969.

-HSU, G. C. et al. . **Introduction to Aluminum and Aluminum Alloys**, American Society for Metals Handbook Committee (v. 2), Ohio, 9ª ed., 1979.

-HUNTER, S. C.. **Mechanics of Continuous Media** (2ª ed.), Nova Iorque, Ed. Halsted Press, 1983.

-IBRAHIMBEGOVIC, A.. "Finite Elasto-Plastic deformation of membrane Shells", **Engineering Computation** (v. 13), São Francisco, University Press, 1996.

-KECK, P.; Wilhelm M.; Lange K.. "Application of the Finite Element Method to the Simulation of Sheet Forming Process", **International Journal for Numericals Methods in Engineering** (v. 30), Nova Iorque, John Wiley and Sons Inc., 1990.

-KOBAYASHI, S. *et al*.. **Metal Forming and the Finite Element Method**, Nova Iorque, Oxford University Press, 1989.

-LOGAN, D. L.. **A First Course in the Finite Element Method**, São Francisco, University Press, 1986.

-LYMAN, T. *et al*.. **American Society for Metals Handbook Committee** (v. 4), Ohio, 1969.

-MALVERN, L. E.. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**, Englewood Cliffs (EUA), Prentice-Hall, 1969.

-MASE, G. E.. **Continuum Mechanics**, Nova Iorque, Mc Graw-Hill Book Company, 1970.

-NAKAMACHI, E.. "Static-Explicit Elastic Plastic Finite Element Simulation and Virtual Manufacturing of Sheet Metal Forming", **Engineering Computation** (v. 13), São Francisco, University Press, 1996.

-NAKAMACHI, E.; HUO, T.. **"**Dinamic-Explicit Elastic Plastic Finite-Element Simulation of Hemispherical Punch-Drawing of Sheet Metal", **Engineering Computation** (v. 13), São Francisco, University Press, 1996.

-NEALE, K. W.; Tugcu, P.. **"**A Numerical Analysis of Wrinkle Formation Tendencies in Sheet Metals", **International Journal for Numericals Methods in Engineering** (v. 30), Nova Iorque, John Wiley and Sons Inc., 1990.

-NEWBY, J. R.. "Formability of Steel Sheet", **American Society for Metals Handbook Committee** (v. I) , Ohio, 9ª edição, 1978.

-PAULETTI, R. M. O.. **Estudo da Geometria da Seção Transversal de Condutor Dobrado**, comunicação privada, 1998.

-PEARCE, R.. **Sheet Metal Forming**, Bristol (RU), Nottingham University, 1991.

-PIMENTA, P. de Mattos. **Fundamentos da Teoria das Estruturas**, São Paulo, edição da EPUSP, 1994.

-PRAGER, W.. **Introduction to Mechanics of Continua**, Basel (Suíça), Ed. Ginn and Company, 1961.

-REBELO, N.; Nagtegaal, J. C.; Hibbitt, H. D.. "Finite Element Analysis of Sheet Forming Process", **International Journal for Numericals Methods in Engineering** (v. 30), Nova Iorque, John Wiley and Sons Inc., 1990.

-RODRIGUEZ, G. P. V. S.. **Sobre a Integração Direta de Sistemas de Equações Ordinárias Lineares de 1ª e 2ª ordem**, São Paulo, Dissertação EPUSP, 1996.

-SARAN, M. J.; SAMUELSON, A.. "Elastic-Viscoplastic Implicit Formulation for Finite Element Simulation of Complex Sheet Forming Process", **International Journal for Numericals Methods in Engineering** (v. 30), Nova Iorque, John Wiley and Sons Inc., 1990.

-SARTRE, J-P.. **Que é a Literatura**, São Paulo, Ed. Ática, 1966.

-STEELE, J. M.. **Applied Finite Element Modeling**, Rochester, Marcel Dekker Inc., 1989.

-SZABÓ, B.; Babuska, I.. **Finite Element Analysis**, N. Iorque, J. Wiley & Sons Inc., 1991.

-TAYLOR, B.. "Formability Testing of Sheet Metals", **American Society for Metals Handbook Committee** (v. 14), Ohio, 9ª ed., 1988.

-TRAFICANTE, R. J.; WEEKS, W. L.. "Stamping of Aluminum Alloy Sheet", **American Society for Metals Handbook Committee** (v. 2) , Ohio, 9ª ed., 1979.

-VAN VLACK, L. H.. **Princípios de Ciências dos Materiais**, São Paulo, Ed. Edgard Blücher, 1970.

-WAGONER, R. H.; Chenot, J-L.. **Fundamentals of Metal Forming**, Nova Iorque, John Wiley and Sons Inc., 1997.

-WHIRLEY, R. G.. "Elastoplastic Shell Analysis in DYNA3D", Livermore, **Mechanical Engineering**, jan. 1991.

-YOSHIDA, S ; Kihara, S.. "Some Experiences of Shape-Forming Process: Experiments and Numerical Simulations", **Engineering Computation** (v. 13), São Francisco, University Press, 1996.

-ZAGOTIS, Décio de. **Introdução à Teoria das Estruturas: Elasticidade-Elementos Finitos**, São Paulo, edição da EPUSP, 1982.

-ZIENKIEVICZ, O. C.. **El Método de los Elementos Finitos**, 3ª ed., Barcelona, Ed. Reverté, 1980.

-ZIENKIEVICZ, O. C.; Taylor, R. L..**The Finite Element Method**, 4ª ed., Londres, McGraw-Hill Book Company, 1991.

Posfácio

Notas sobre os caminhos do conhecimento

Março de 2001

"*O autor é essencialmente como a sua obra, que mostra hipóteses, sonhos e decepções daqueles que a expressam*" (Sartre)

O escritor tem que se perguntar o porquê de escrever; o cientista deve saber a que serve sua ciência. É certo que há de se buscar somar no campo dos conhecimentos científicos. No terreno dos saberes filosóficos, porém, há antes de diminuir a sombra, pouco a pouco. A sabedoria deveria dirigir o homem, segundo valores da ética, do amor. A ciência, como a técnica, deveria servir ao homem, jamais se servir dele – como é a tendência de nosso tempo contemporâneo sem rumo.

E se uma efetiva crítica não pode prescindir da autocrítica, questiono-me: por que iniciei esta pesquisa, se nosso mundo está tão longe de permitir aos homens que desfrutem de seu próprio conhecimento? Grande parte da humanidade é tão pobre que não pode ter contato com quase nenhuma das benfeitorias básicas advindas da Modernidade; aliás, pelo contrário, há tempos vemos que, onde chega a técnica moderna, a vida normalmente se deteriora. Assim sendo, para quem eu estive trabalhando? Para quem escrevi?

Os pesquisadores e pensadores têm um longo caminho de aprendizado a percorrer. Quis a minha história que eu tivesse seguido – de início – este: o das ciências naturais (equivocada ou ideologicamente ditas "ciências exatas"). Por vezes é preciso fazer a *coisa*, provar do erro, para depois criticá-lo. Como diz um antigo filósofo: provar do sofrimento – e da piedade – engrandece o espírito.

Acreditei um dia que o desenvolvimento do conhecimento técnico-científico pudesse frear a carroça desembestada da tragédia humana moderna. Ingenuidade de juventude; já era tarde. Este conhecimento já tinha evoluído o suficiente, mas o patentearam. Aquele ser humano simples, que outrora deixara a terra de todos ser cercada por uns poucos, agora sequer tinha noção daquilo que lhe tomavam. Mesmo aquela *elite material*, imediatamente beneficiada com a pilhagem, não teve perspicácia de espírito para perceber o que sucedia. Matou-se deus, mas se tentava matar também a Filosofia. E apesar de só estar possivelmente na morte a cura de alguns dos piores males, espera-se não ser este mal – o *mal moderno,* a falta de sentido – o fim da humanidade.

Pois aconteceu que se chegou a um grau de conhecimentos em que não era mais necessário – nem interessante – permitir-se aos pensadores que pensassem: já haviam pensado até onde deveriam. Idéias avançadas, acuradas – atentas a detalhes essenciais, tais como as *contradições* –, podem ser perigosas às frestas que há em todas as estruturas; podem comprometer o sistema geocêntrico e as cúpulas de cristal onde repousam fixas as estrelas, os dogmas, os reis e as rainhas. Foi assim então que se fundou, na propaganda idiotizante de massa, o regime dito neoliberal: espécie de fascismo *adornado* contemporâneo, que tem por bastião um pseudo-racionalismo positivista que tenta fazer crer aos incautos que todas as verdades que deveriam ter sido pensadas já o foram, e que cabe agora apenas regê-las com maestria, precisão, disciplina – sem questionamentos ou "inutilidades" do gênero, que não passariam de entraves à divina *competitividade*.

Teríamos chegado ao "fim da história" – como afirmou certa vez um certo funcionário bem pago e medíocre do alto-sistema? Se assim for, siga-se, pois, *irmão*, a verdade pronta, a "mais certa": é somente agitar e usar.

* * *

Modernidade de homens iguais... Iguais em tudo na vida: na falta de experiências e na pobreza, uns de arroz, outros de poesia. O medo do desconhecido apavora o ser humano. Isto se acentua ainda mais, mostra a psicologia – ciência do irracional –, quando se trata de pessoas sem suficiente individuação, sem capacidade auto-crítica. Eis o mundo moderno: a sociedade dos sem-experiência controlada pela força dos sem-personalidade. Uma sociedade insegura e de inseguros. Seres perdidos na igualdade rasa dos *chopincênteres*, na massificação globalizada da estética *pop*, na infantilidade dos

enlatados de *Hollywood*, cujos enredos, desde cedo, crianças já sabem como terminam (ainda que, quando adultas, tantas delas percam esta sagacidade).

Todos estes ícones alienantes são coroados, no limite da sordidez, por editoriais neoliberais, com acenos fascistas, da grande imprensa corporativa – mídia associada ao capital que comanda a grande maioria da opinião pública do planeta. São homens sem conteúdo, sem noção de ética, amor ou piedade, que apostam em uma pretensa salvação de suas almas por meio da diferença "essencial" que haveria na quantificação das posses – volumes tão virtuosos quanto o esterco que os cobrirá no dia derradeiro.

Assim seguimos, tiranizados por uma elite fútil, superficial, mas *sofisticada.* E aprendemos a também venerar tal *sofisticação* que enfraquece e vicia, sem nos questionarmos sobre este conceito – derivado de *sofisma*, engodo –, uma mentira que mata, assim como suas idéias irmãs: *meritocracia* e *competitividade.*

Segundo nossa atual racionalidade *instrumental* – razão reduzida à ganância imediata –, é necessário achar uma explicação para tudo aquilo que não se quer efetivamente explicar. Qualquer coisa serve... um mito primitivo que seja: deus, o diabo; a mecânica ou a economia (tidas como *exatas,* à revelia do homem); o dinheiro, o poder. A razão que pode ser numericamente contada ou prevista está já bem estabelecida, mas é limitadíssima. Uma razão cientificista, que não atenta aos detalhes, às nuances da existência; uma razão curta, restrita, que faz seres humanos se assassinarem por quase nada; ou ainda (quem sabe pior), que simplesmente os deixa morrer (caso da África que, pauperizada pelo colonialismo, é hoje tratada com desprezo pelos "investidores").

* * *

Os mesmos assuntos que interessam a deus, interessam ao diabo – quem sabe uma espécie de *revisor* de deus. É somente nos extremos, nos detalhes das margens, em que se encontram as verdades mais importantes: aquelas que realmente servem à vida.

Como muitos dos grandes pensadores contemporâneos já notaram, depois de Marx e Freud – mas também de Dostoiévski, Paulo Freire e tantos outros –, ninguém mais é inocente! Segredos amargos vieram à tona: intimidades, fraquezas, egoísmos, perversidades foram reveladas. O homem é um animal histórico que sofre e faz sofrer, cujos recalques inconscientes agem sem que se os perceba com nitidez. Será errada a teoria psicológica de que na infância traumatizada, tolhida, estariam os maiores problemas da

necessidade patológica de segurança e exagerada acumulação de bens? Ou a concepção de que através da violenta opressão social e, ainda, da repressão sexual a ela associada (sim, pois a falsa *libertação* contemporânea dos *corpos* em geral não passa de alienada *libertinagem para consumo*) constroem-se imbecis apáticos, inertes – seres castrados em suas potências humanas, incapazes de tomar decisões existenciais ou de exercer suficientemente sua cidadania, criatividade, libido? Que dirá disto o bom burguês racional, filantropo, a quem estão destinadas as melhores balas de Brecht?

* * *

Ninguém está livre do inferno moderno, muito menos da culpa por ele ainda existir – e de forma tão intensa, tão presente. Ao intelectual – este ser que se supõe ser menos inconsciente de que a média – só caberia uma postura coerente e honesta: engajar-se em defesa do uso democrático do conhecimento. A verdade é uma experiência que jamais é absoluta, e cuja busca por refinamentos não cessa. Como tudo no universo – até onde (não) sabemos –, o conhecimento é uma onda que ora acelera, ora retrai; que não tem uma direção única: que evolui, mas também involui.

Não há, portanto, uma única possibilidade de sentido para o progresso, e mesmo o conceito de "progresso" tem uma evolução histórica – devendo, assim, ser constantemente debatido. Não existem ciências "exatas" – rígidas, estagnadas – conforme pregam os arcaicos dogmas modernos (tais como as "verdades" dos *economicistas*, falácias que vigoram tão próximas ao poder). O que há – para quem queira observar a realidade de acordo com o ferramental que já nos está oferecido – são as *ciências naturais* e as *ciências humanas*, estas duas faces da grande "ciência da história", de que nos falam Marx e Engels (no sentido de que toda ciência deve ser tratada em perspectiva histórica). Entretanto, ao menos enquanto existirem os seres humanos, esses dois campos científicos se condicionarão mutuamente: não se pode conceber ambos em separado.

Na atualidade, apesar de tantas "evoluções" parciais, o que se vê – em se observando a totalidade do problema – é uma verdade paralisada, engessada por um sistema organizado segundo certos interesses particulares. Um sistema robusto em sua lógica interna, mas que não reflete sobre a realidade como um todo – e, aliás, nem permite que haja tal reflexão.

É preciso que se dê um novo salto à frente, que haja uma nova revolução das idéias. É necessário que a ciência se questione, se pense e auto-critique. Urge que se encontre uma razão superior, que forneça à ciência novamente um motivo para existir – antes que a própria ciência destrua quem a elaborou. A racionalidade científica (ou antes "cientificista") moderna é meramente uma técnica de modelagem de meios, um *instrumento* que não discute o valor dos *fins* desejados. E isto especialmente neste período já decadente da modernidade, em que os efeitos da crise estrutural capitalista acentuam a descrença nas possibilidades da vida, agravando o niilismo típico do homem contemporâneo – tão empobrecido de experiências.

Como conceber que se gaste muito mais com a pesquisa de cosméticos, do que com o estudo de doenças tropicais, num país miserável cujo povo ainda morre vítima da senil malária. Como aceitar que o lixo orgânico gerado pelos estadunidenses contenha quantidade de alimento que seria suficiente para manter subsistindo quase a metade dos cem milhões de latino-americanos, africanos, asiáticos e demais condenados pelos céus da razão capitalista que tombam de fome a cada ano de globalização da miséria? Globalizemos a Amazônia, mas também as crianças – dirigentes doentes!

* * *

Decerto que o marxismo, enquanto ética e filosofia política ou, de outro ângulo, enquanto método científico e perspectiva epistemológica, nada tem que dizer acerca dos debates teóricos da mecânica elasto-plástica ou da precisão dos cálculos numéricos do método dos elementos finitos. Mas também não cabem dúvidas de que é uma decisão humana o uso dessas ferramentas para a confecção de automóveis individuais (poluentes e estorvantes), que contribuem para tornar a vida nas grandes urbes impraticável; ou, ao invés disso, a sua utilização social para conceber uma rede de transportes coletivos limpos, universal e de qualidade. E isso sem mencionar a sórdida aplicação de tais conhecimentos na construção de máquinas de guerra ou de mecanismos para controlar a sociedade.

Não há ciência imparcial, jornalismo imparcial, política imparcial. A física moderno-contemporânea mostrou que o olhar do observador – do *sujeito* – muda a trajetória do *objeto* observado. Ou, como se sabe há muito: o olhar do leão modifica o caminho da gazela.

Evidentemente, não se trata de cercear os caminhos da ciência ou a criatividade dos cientistas, mas de planejar políticas públicas, de oferecer sentidos para o desenvolvimento do conhecimento e, por conseguinte, da história humana. E isto deve partir de análises objetivas – da eleição de objetivos prioritários que, tendo por base uma concepção acurada e humanizada da totalidade social, possam servir de guia para decisões políticas que permitam encaminhar a resolução dos problemas e conflitos prementes da sociedade.

Há uma crise na razão – não propriamente no *interior* da ciência, mas em seu *exterior* –, e ela só poderá se salvar se for bruscamente freada; se se olhar com escrúpulos para a realidade de dor que é o mundo: dor que está ao lado, mas também embaixo, acima, dentro. Há que se recusar a padronização, o unidimensionalismo pretensamente correto do pensar, o esquema *mecanicista* e *evolucionista-social* simplório de se enxergar a história. É preciso duvidar-se do que está posto, questionar-se: esta a arte da evolução – que nem sempre evolui para onde se desejaria.

Perceber o óbvio é também uma arte: embora muito pouco executada nos dias que vão. Em seu drama "A Vida de Galileu", Bertolt Brecht critica o dogmatismo geocêntrico do século XVII – a falta de percepção dos homens daquele tempo acerca das evidências que a realidade e o conhecimento já lhes ofereciam. Trata-se de uma nítida analogia com a limitação da ciência sócio-econômica e política "liberais" da Modernidade, cujos estreitos elementos (mecanicistas, unidimensionais, destrutivos, causadores de fome e guerras) ainda vigoram: como se houvesse apenas um *sentido único* para a evolução racional e humana. Tais elementos – advindos do ideário positivista que se seguiu às *Luzes* –, embora hoje detenham menos força teórica, mantêm-se bastante alinhados e cúmplices dos poderes políticos e militares.

* * *

E aconteceu, leitor, que enveredei por este sendeiro, que investiguei e escrevi esta dissertação, me arriscando nos caminhos opacos da ciência dura, das técnicas: um *jogo* intrigante, mas hoje em grande medida perdido e sem sentido. Se a área da escrita lhe parecer pouco apropriada para quem busca na existência algo mais consistente, concordo. Porém com a ressalva de que, na luta pelo esclarecimento, os caminhos são tortuosos e sem guias, como os da vida.

Os erros existem e são necessários para o aprendizado. Colhi bastante conhecimento prático neste rumo desajeitado das ciências naturais, mas também algum saber – pois, quando se aprende a perscrutar as sombras, o há por todo lado. A lógica formal aguça o raciocínio; contudo, a jornada para a sabedoria é muito mais longa de que supõe o vão raciocínio imediatista: é uma trilha paciente, meditativa, com variáveis pouco definidas e escolhas difíceis – pois não comporta respostas prontas.

Foram percorridos milênios de culturas para se chegar ao *marxismo*, que é como se denominou a *concepção materialista da história*: um pensamento *dialético* e de *práxis*, que nesta comunhão se coloca como a única filosofia, efetivamente *contemporânea*, de nosso tempo, e ainda longe de poder ser transcendida. Desde então, *pensar* deixou de ser somente refletir, ter idéias, construir teorias. Em seu conceito mais amplo, *pensar* passou a se referir à ação social coletiva e organizada que promove a realização das idéias.

O socialismo marxista ou *pensamento da práxis* – saber secular sistematizado e aprofundado por Marx e Engels, seus fundadores – parte da *teoria* e segue rumo à *prática*. Da análise teórica, construída mediante a investigação científica e a interpretação filosófica das contradições da sociedade (ou seja, dos absurdos desníveis, dos desequilíbrios e crueldades que se evidenciam na observação dos extremos sociais), chega-se então à ação planejada, apaziguadora de conflitos, humanizadora, redutora de disparidades (e portanto *mais* ética). Então, neste *movimento* – pois que o saber, nessa perspectiva, é um *processo* –, em seguida à implementação do plano teorizado cabe repensar, no contexto da *nova realidade*, as transformações das próprias idéias, das teorias postas em prática.

A esta visão filosófica, científica e prática do mundo – que tem na *dialética* e na *práxis* seus princípios fundamentais – se convencionou denominar marxismo, pensamento da práxis, materialismo histórico, comunismo contemporâneo. Independente de nomenclaturas, trata-se de uma concepção da existência que acredita na urgência ética de se construir situações concretas mais adequadas à vida, em que o metabolismo entre o humano e a natureza que o cerca seja mais harmônico e tenha mais viabilidade histórica; em que a sociedade humana possa se desenvolver material e culturalmente como um todo, humanizando-se ou, de outro modo, favorecendo a *liberdade coletiva*, a ética, a criatividade, o desenvolvimento pleno das *potências* do ser humano (que é quem produz coletivamente as condições para se gerar *idéias* e *teorias*).

Infelizmente, tolas crendices "geocêntricas" da atualidade ainda acusam o marxismo, o comunismo contemporâneo, de perigoso pensamento promotor de conflitos; ou mesmo de ter *instaurado* (ou simplesmente *inventado*) a disputa e o ódio de classes – fenômeno que, em verdade, este pensamento apenas busca compreender, para tentar solucionar. Como ocorreu outrora, os atuais "crentes" do *status quo* dizem que tais idéias privam o ser humano de "liberdade". Mas rasos, se esquecem de que, como a ciência, também a liberdade tem vários caminhos, possibilidades; que também a "liberdade" é um conceito que admite sentidos deletérios, podendo-se referir, por exemplo, à "liberdade individual" de alguns poucos controlarem, dominarem, explorarem e mesmo eliminarem fisicamente seus semelhantes. Contudo, a mesma palavra "liberdade" pode ter também um significado mais amplo, coletivo, nobre: referindo-se a um movimento de libertação conjunta, solidária, de paulatina emancipação humana no sentido de uma sociedade com menores contradições, conflitos, sem abismos sociais.

"O *comunismo* – bem ponderaram Marx e Engels –, não priva ninguém do poder de se apropriar dos produtos sociais; o que faz é eliminar o poder de subjugar o trabalho alheio por meio dessa apropriação". Hoje, mediante o cultivo da ignorância e do medo, os detentores do poder ainda tentam ressuscitar retrógrados mitos. Mas *deus* está morto, e alguns *Homens* sobreviveram a *ele*.

Anexos:

Tempos de processamento

Dados de deformações e geometria

Forças no punção por tempo de análise

TEMPOS DE PROCESSAMENTO

Aço - densidade verdadeira.

Timing information

	CPU(seconds)	%CPU	Clock(seconds)	%Clock
Initialization	5.0000E+01	0.44	5.0182E+01	0.44
Element processing ...	4.7810E+03	42.28	4.8043E+03	42.48
Binary databases	2.3000E+01	0.20	1.9496E+01	0.17
ASCII database	9.0000E+00	0.08	6.9100E+00	0.06
Contact algorithm	6.3970E+03	56.57	6.3804E+03	56.42
Contact entities	0.0000E+00	0.00	0.0000E+00	0.00
Rigid bodies	4.9000E+01	0.43	4.8191E+01	0.43

Problem time = 1.0000E+02
Problem cycle = 107738
Total CPU time = 11309 seconds (3 hours 8 minutes 29 seconds)
CPU time per zone cycle = 64788 nanoseconds
Clock time per zone cycle= 64790 nanoseconds
Start time 02/01/2001 02:19:10
End time 02/01/2001 05:27:45
Elapsed time 11315 seconds (3 hours 8 minutes 35 seconds)

Aço - densidade quadruplicada

Timing information

	CPU(seconds)	%CPU	Clock(seconds)	%Clock
Initialization	1.3000E+01	0.21	1.3589E+01	0.22
Element processing ...	2.5930E+03	42.36	2.6173E+03	42.73
Binary databases	2.0000E+01	0.33	1.6965E+01	0.28
ASCII database	7.0000E+00	0.11	5.0750E+00	0.08
Contact algorithm	3.4660E+03	56.62	3.4463E+03	56.27
Contact entities	0.0000E+00	0.00	0.0000E+00	0.00
Rigid bodies	2.3000E+01	0.38	2.5644E+01	0.42
Totals	6.1220E+03	100.00	6.1249E+03	100.00

Problem time = 1.0000E+02
Problem cycle = 57775
Total CPU time = 6122 seconds (1 hours 42 minutes 2 seconds)
CPU time per zone cycle = 65553 nanoseconds
Clock time per zone cycle= 65578 nanoseconds
Start time 02/01/2001 12:46:58
End time 02/01/2001 14:29:07
Elapsed time 6129 seconds (1 hours 42 minutes 9 seconds)

Alumínio sem atrito dinâmico

```
Timing information
                CPU(seconds)  %CPU  Clock(seconds) %Clock
-------------------------------------------------------------
Initialization ..... 1.4000E+01   0.13    1.4791E+01   0.13
Element processing ... 5.0520E+03  45.21    5.0402E+03  45.11
Binary databases ..... 2.4000E+01   0.21    1.8039E+01   0.16
ASCII database ..... 5.0000E+00   0.04    6.0680E+00   0.05
Contact algorithm .... 6.0380E+03  54.04    6.0494E+03  54.14
Contact entities ..... 0.0000E+00   0.00    0.0000E+00   0.00
Rigid bodies ..... 4.1000E+01   0.37    4.4829E+01   0.40
-------------------------------------------------------------
Totals          1.1174E+04  100.00    1.1173E+04  100.00

Problem time     =   1.0000E+02
Problem cycle    =   103078
Total CPU time   =    11174 seconds (  3 hours  6 minutes 14 seconds)
CPU time per zone cycle =    68697 nanoseconds
Clock time per zone cycle=   68688 nanoseconds
Start time  02/01/2001 19:21:32
End time    02/01/2001 22:27:57
Elapsed time   11185 seconds (  3 hours  6 minutes 25 seconds)
```

Alumínio com atrito dinâmico

```
Timing information
                CPU(seconds)  %CPU  Clock(seconds) %Clock
-------------------------------------------------------------
Initialization ..... 1.3000E+01   0.11    1.3340E+01   0.12
Element processing ... 4.9030E+03  42.95    4.9460E+03  43.32
Binary databases ..... 1.2000E+01   0.11    1.8718E+01   0.16
ASCII database ..... 6.0000E+00   0.05    7.1190E+00   0.06
Contact algorithm .... 6.4390E+03  56.40    6.3881E+03  55.95
Contact entities ..... 0.0000E+00   0.00    0.0000E+00   0.00
Rigid bodies ..... 4.3000E+01   0.38    4.4080E+01   0.39
-------------------------------------------------------------
Totals          1.1416E+04  100.00    1.1417E+04  100.00

Problem time     =   1.0000E+02
Problem cycle    =   101889
Total CPU time   =    11416 seconds (  3 hours 10 minutes 16 seconds)
CPU time per zone cycle =    69383 nanoseconds
Clock time per zone cycle=   69389 nanoseconds
Start time  02/04/2001 20:03:06
End time    02/04/2001 23:13:28
Elapsed time   11422 seconds (  3 hours 10 minutes 22 seconds)
```

GRUPO DE NÓS : RAIO PARALELO
LIST ALL SELECTED NODES. DSYS= 0
SORT TABLE ON NODE NODE NODE

NODE	X	Y	Z
37	6.91176470588	0.000000000000	-0.199999999495E-05
136	6.91176470588	235.000000000	-0.199999999495E-05
137	6.91176470588	228.088235294	-0.199999999495E-05
170	6.91176470588	221.176470588	-0.199999999495E-05
203	6.91176470588	214.264705882	-0.199999999495E-05
236	6.91176470588	207.352941176	-0.199999999495E-05
269	6.91176470588	200.441176471	-0.199999999495E-05
302	6.91176470588	193.529411765	-0.199999999495E-05
335	6.91176470588	186.617647059	-0.199999999495E-05
368	6.91176470588	179.705882353	-0.199999999495E-05
401	6.91176470588	172.794117647	-0.199999999495E-05
434	6.91176470588	165.882352941	-0.199999999495E-05
467	6.91176470588	158.970588235	-0.199999999495E-05
500	6.91176470588	152.058823529	-0.199999999495E-05
533	6.91176470588	145.147058824	-0.199999999495E-05
566	6.91176470588	138.235294118	-0.199999999495E-05
599	6.91176470588	131.323529412	-0.199999999495E-05
632	6.91176470588	124.411764706	-0.199999999495E-05
665	6.91176470588	117.500000000	-0.199999999495E-05
698	6.91176470588	110.588235294	-0.199999999495E-05
731	6.91176470588	103.676470588	-0.199999999495E-05
764	6.91176470588	96.7647058824	-0.199999999495E-05
797	6.91176470588	89.8529411765	-0.199999999495E-05
830	6.91176470588	82.9411764706	-0.199999999495E-05
863	6.91176470588	76.0294117647	-0.199999999495E-05
896	6.91176470588	69.1176470588	-0.199999999495E-05
929	6.91176470588	62.2058823529	-0.199999999495E-05
962	6.91176470588	55.2941176471	-0.199999999495E-05
995	6.91176470588	48.3823529412	-0.199999999495E-05
1028	6.91176470588	41.4705882353	-0.199999999495E-05
1061	6.91176470588	34.5588235294	-0.199999999495E-05
1094	6.91176470588	27.6470588235	-0.199999999495E-05
1127	6.91176470588	20.7352941176	-0.199999999495E-05
1160	6.91176470588	13.8235294118	-0.199999999495E-05
1193	6.91176470588	6.91176470588	-0.199999999495E-05

GRUPO DE NÓS : RAIO OBLÍQUO
LIST ALL SELECTED NODES. DSYS= 0
SORT TABLE ON NODE NODE NODE

NODE	X	Y	Z	
70	235.000000000	235.000000000	-0.199999999495E-05	
169	228.088235294	228.088235294	-0.199999999495E-05	
201	221.176470588	221.176470588	-0.199999999495E-05	
233	214.264705882	214.264705882	-0.199999999495E-05	
265	207.352941176	207.352941176	-0.199999999495E-05	
297	200.441176471	200.441176471	-0.199999999495E-05	
329	193.529411765	193.529411765	-0.199999999495E-05	
361	186.617647059	186.617647059	-0.199999999495E-05	
393	179.705882353	179.705882353	-0.199999999495E-05	
425	172.794117647	172.794117647	-0.199999999495E-05	
457	165.882352941	165.882352941	-0.199999999495E-05	
489	158.970588235	158.970588235	-0.199999999495E-05	
521	152.058823529	152.058823529	-0.199999999495E-05	
553	145.147058824	145.147058824	-0.199999999495E-05	
585	138.235294118	138.235294118	-0.199999999495E-05	
617	131.323529412	131.323529412	-0.199999999495E-05	
649	124.411764706	124.411764706	-0.199999999495E-05	
681	117.500000000	117.500000000	-0.199999999495E-05	
713	110.588235294	110.588235294	-0.199999999495E-05	
745	103.676470588	103.676470588	-0.199999999495E-05	
777	96.7647058824	96.7647058824	-0.199999999495E-05	
809	89.8529411765	89.8529411765	-0.199999999495E-05	
841	82.9411764706	82.9411764706	-0.199999999495E-05	
873	76.0294117647	76.0294117647	-0.199999999495E-05	
905	69.1176470588	69.1176470588	-0.199999999495E-05	
937	62.2058823529	62.2058823529	-0.199999999495E-05	
969	55.2941176471	55.2941176471	-0.199999999495E-05	
1001	48.3823529412	48.3823529412	-0.199999999495E-05	
1033	41.4705882353	41.4705882353	-0.199999999495E-05	
1065	34.5588235294	34.5588235294	-0.199999999495E-05	
1097	27.6470588235	27.6470588235	-0.199999999495E-05	
1129	20.7352941176	20.7352941176	-0.199999999495E-05	
1161	13.8235294118	13.8235294118	-0.199999999495E-05	
1193	6.91176470588	6.91176470588	-0.199999999495E-05	

Espessura por posição radial

Raio Oblíquo

Distância Radial	EpZ-sem/atr	EpZ-com/atr
322.5655	0.0000	0.0000
303.0161	0.0000	0.0000
283.4666	0.0001	0.0001
263.9172	0.0014	0.0019
244.3678	0.0269	0.0217
224.8184	0.0344	0.0445
205.2689	-0.0080	-0.0306
185.7195	-0.0602	-0.1103
166.1701	-0.0936	-0.1774
146.6207	-0.0898	-0.0887
127.0712	-0.0407	-0.0384
107.5218	-0.0131	-0.0142
87.9724	-0.0017	-0.0046
68.4230	-0.0005	-0.0022
48.8736	-0.0004	-0.0017
29.3241	-0.0003	-0.0017
9.7747	-0.0004	-0.0017

Raio paralelo

Distância Radial	EPZ-sem/atr	EPZ-com/atr
235.1016	*0.1738*	*0.1470*
221.2844	0.1212	0.1070
207.4681	0.0284	0.0045
193.6528	0.0105	-0.0003
179.8388	-0.0097	-0.0117
166.0263	-0.0119	-0.0314
152.2158	-0.0059	-0.0390
138.4080	0.0135	0.0013
124.6036	0.0246	0.0133
110.8040	0.0044	0.0009
97.0112	-0.0010	-0.0015
83.2287	-0.0006	-0.0013
69.4624	-0.0004	-0.0012
55.7244	-0.0003	-0.0013
42.0426	-0.0003	-0.0015
28.4979	-0.0004	-0.0016
15.4552	-0.0004	-0.0016

DADOS PARA DIAGRAMA LIMITE DE CONFORMAÇÃO

DEFORMAÇÕES PRINCIPAIS
RAIO OBLÍQUO

SEM ATRITO

NODE	EPPL1	EPPL2	EPPL3	EPPLINT	EPPLEQV
169	0.14738E-03	-0.35576E-04	-0.64106E-04	0.21149E-03	0.19877E-03
233	0.50177E-03	-0.48080E-04	-0.39419E-03	0.89596E-03	0.78258E-03
297	0.13324E-03	0.80671E-04	-0.38244E-03	0.51568E-03	0.49151E-03
361	0.14169E-02	0.28817E-04	-0.17215E-02	0.31384E-02	0.27240E-02
425	0.26950E-01	0.23816E-01	-0.51039E-01	0.77989E-01	0.76470E-01
489	0.19549	0.34348E-01	-0.22977	0.42525	0.37186
553	0.32558	-0.80154E-02	-0.31747	0.64305	0.55703
617	0.27844	-0.60298E-01	-0.21786	0.49629	0.43924
681	0.16425	-0.70059E-01	-0.93718E-01	0.25796	0.24699
745	0.69780E-01	0.20662E-01	-0.90115E-01	0.15989	0.14186
809	0.38258E-01	0.29038E-02	-0.40742E-01	0.79000E-01	0.68542E-01
873	0.13397E-01	0.60651E-04	-0.13099E-01	0.26496E-01	0.22947E-01
937	0.18911E-02	0.14984E-03	-0.17315E-02	0.36226E-02	0.31381E-02
1001	0.64250E-03	0.16606E-03	-0.53701E-03	0.11795E-02	0.10277E-02
1065	0.42911E-03	0.20628E-03	-0.35296E-03	0.78208E-03	0.69787E-03
1129	0.35700E-03	0.21513E-03	-0.30486E-03	0.66186E-03	0.60356E-03
1193	0.39854E-03	0.28000E-03	-0.43768E-03	0.83622E-03	0.78371E-03

COM ATRITO

NODE	EPPL1	EPPL2	EPPL3	EPPLINT	EPPLEQV
169	0.11974E-03	-0.32419E-04	-0.37436E-04	0.15717E-03	0.15473E-03
233	0.33147E-03	-0.46049E-04	-0.22403E-03	0.55550E-03	0.49131E-03
297	0.14590E-03	0.13898E-04	-0.35433E-03	0.50023E-03	0.44902E-03
361	0.18617E-02	-0.18566E-03	-0.20347E-02	0.38964E-02	0.33758E-02
425	0.21716E-01	0.15489E-01	-0.37464E-01	0.59180E-01	0.56325E-01
489	0.14674	0.44534E-01	-0.19122	0.33796	0.30020
553	0.34400	-0.30580E-01	-0.31333	0.65733	0.57111
617	0.34155	-0.11032	-0.23082	0.57237	0.52265
681	0.24659	-0.68548E-01	-0.17748	0.42407	0.38145
745	0.67005E-01	0.22193E-01	-0.89015E-01	0.15602	0.13914
809	0.31907E-01	0.68504E-02	-0.38431E-01	0.70338E-01	0.61748E-01
873	0.12529E-01	0.20708E-02	-0.14223E-01	0.26752E-01	0.23351E-01
937	0.37241E-02	0.12379E-02	-0.45836E-02	0.83077E-02	0.73854E-02
1001	0.17656E-02	0.88689E-03	-0.22416E-02	0.40073E-02	0.36482E-02
1065	0.12857E-02	0.84517E-03	-0.17433E-02	0.30290E-02	0.28345E-02
1129	0.11089E-02	0.92905E-03	-0.16614E-02	0.27704E-02	0.26849E-02
1193	0.11296E-02	0.89678E-03	-0.16541E-02	0.27837E-02	0.26749E-02

RAIO PARALELO
SEM ATRITO

136	0.19357	0.17376	-0.36773	0.56130	0.55166
170	0.15808	0.12114	-0.27930	0.43737	0.42013

236 0.13988 0.28476E-01-0.16835 0.30823 0.27033
302 0.67984E-01 0.10511E-01-0.78715E-01 0.14670 0.12803
368 0.29941E-01-0.88987E-02-0.21259E-01 0.51200E-01 0.46275E-01
434 0.16748E-01-0.40128E-02-0.12909E-01 0.29656E-01 0.26359E-01
500 0.13317E-01-0.47236E-02-0.90322E-02 0.22350E-01 0.20537E-01
566 0.13457E-01-0.59791E-03-0.12918E-01 0.26375E-01 0.22858E-01
632 0.24740E-01 0.64659E-02-0.30925E-01 0.55665E-01 0.49145E-01
698 0.44555E-02 0.99120E-03-0.51858E-02 0.96413E-02 0.84591E-02
764 0.75264E-03 0.51340E-03-0.97205E-03 0.17247E-02 0.16184E-02
830 0.51567E-03 0.38822E-03-0.57624E-03 0.10919E-02 0.10341E-02
896 0.47495E-03 0.27348E-03-0.40008E-03 0.87504E-03 0.79372E-03
962 0.37939E-03 0.25703E-03-0.31623E-03 0.69562E-03 0.64323E-03
1028 0.37911E-03 0.22980E-03-0.28558E-03 0.66469E-03 0.60404E-03
1094 0.38433E-03 0.32686E-03-0.38183E-03 0.76615E-03 0.73910E-03
1160 0.40349E-03 0.29865E-03-0.41414E-03 0.81763E-03 0.77058E-03

COM ATRITO
136 0.16726 0.14697 -0.31461 0.48186 0.47204
170 0.13395 0.10699 -0.24118 0.37513 0.36240
236 0.15416 0.46066E-02-0.15858 0.31274 0.27093
302 0.89471E-01-0.40603E-04-0.89852E-01 0.17932 0.15530
368 0.45763E-01-0.10995E-01-0.34995E-01 0.80758E-01 0.71831E-01
434 0.39583E-01-0.80556E-02-0.31680E-01 0.71263E-01 0.62872E-01
500 0.42363E-01-0.32501E-02-0.39070E-01 0.81433E-01 0.70693E-01
566 0.16320E-02 0.85267E-03-0.24142E-02 0.40462E-02 0.37183E-02
632 0.18325E-01 0.99772E-02-0.28321E-01 0.46646E-01 0.43083E-01
698 0.10318E-02 0.78363E-03-0.14548E-02 0.24866E-02 0.23723E-02
764 0.11260E-02 0.73346E-03-0.14552E-02 0.25812E-02 0.24090E-02
830 0.10029E-02 0.69911E-03-0.12804E-02 0.22832E-02 0.21475E-02
896 0.99572E-03 0.63709E-03-0.12158E-02 0.22115E-02 0.20558E-02
962 0.98004E-03 0.72675E-03-0.12969E-02 0.22770E-02 0.21615E-02
1028 0.10137E-02 0.83247E-03-0.14547E-02 0.24683E-02 0.23829E-02
1094 0.10904E-02 0.95154E-03-0.16472E-02 0.27376E-02 0.26709E-02
1160 0.10552E-02 0.92995E-03-0.15976E-02 0.26529E-02 0.25925E-02

Forças por Tempo no Contato Chapa-Punsão (nós acoplados-nós mestres)

slave 1 time 0.000000E+00 x 0.1721409E-03y 0.1721409E-03 z -0.6784029E-03

master 1 time 0.000000E+00 x -0.1721409E-03y -0.1721409E-03 z 0.6784029E-03

slave 1 time 0.499885E+01 x 0.1572555E-01y 0.1657697E-01 z -0.1672572E+00

master 1 time 0.499885E+01 x -0.1572555E-01y -0.1657694E-01 z 0.1672584E+00

slave 1 time 0.999948E+01 x 0.1173302E-01y 0.1246399E-01 z -0.5801532E+00

master 1 time 0.999948E+01 x -0.1173313E-01y -0.1246402E-01 z 0.5801547E+00

slave 1 time 0.149990E+02 x 0.2868683E-01y 0.2924278E-01 z -0.1302453E+01

master 1 time 0.149990E+02 x -0.2868693E-01y -0.2924289E-01 z 0.1302468E+01

slave 1 time 0.199989E+02 x 0.9706889E-01y 0.9609670E-01 z -0.2246827E+01

master 1 time 0.199989E+02 x -0.9706987E-01y -0.9609819E-01 z 0.2246894E+01

slave 1 time 0.249998E+02 x 0.3480479E+00y 0.3485121E+00 z -0.3844850E+01

master 1 time 0.249998E+02 x -0.3480517E+00y -0.3485166E+00 z 0.3844945E+01

slave 1 time 0.299999E+02 x 0.1042672E+01y 0.1048215E+01 z -0.5992373E+01

master 1 time 0.299999E+02 x -0.1042656E+01y -0.1048200E+01 z 0.5992512E+01

slave 1 time 0.349997E+02 x 0.1760686E+01y 0.1772154E+01 z -0.7457210E+01

master 1 time 0.349997E+02 x -0.1760781E+01y -0.1772236E+01 z 0.7457208E+01

slave 1 time 0.399995E+02 x 0.2750250E+01y 0.2776028E+01 z -0.9074221E+01

master 1 time 0.399995E+02 x -0.2750290E+01y -0.2776011E+01 z 0.9074275E+01

slave 1 time 0.449999E+02 x 0.3362817E+01y 0.3416561E+01 z -0.1038158E+02

master 1 time 0.449999E+02 x -0.3362820E+01y -0.3416573E+01 z 0.1038175E+02

slave 1 time 0.499994E+02 x 0.4035243E+01y 0.4110985E+01 z -0.1080984E+02

master 1 time 0.499994E+02 x -0.4035327E+01y -0.4111061E+01 z 0.1080989E+02

slave 1 time 0.550000E+02 x 0.4117183E+01y 0.4318290E+01 z -0.1159023E+02

master 1 time 0.550000E+02 x -0.4117296E+01y -0.4318366E+01 z 0.1159014E+02

slave 1 time 0.599992E+02 x 0.4463094E+01y 0.4449015E+01 z -0.1171249E+02

master 1 time 0.599992E+02 x -0.4463139E+01y -0.4449054E+01 z 0.1171270E+02

slave 1 time 0.649998E+02 x 0.4227321E+01y 0.4528193E+01 z -0.1130197E+02

master 1 time 0.649998E+02 x -0.4227413E+01y -0.4528178E+01 z 0.1130216E+02

slave 1 time 0.699992E+02 x 0.4447367E+01y 0.4807011E+01 z -0.1209077E+02

master 1 time 0.699992E+02 x -0.4447581E+01y -0.4807032E+01 z 0.1209090E+02

slave 1 time 0.749994E+02 x 0.4632316E+01y 0.4993065E+01 z -0.1174810E+02

master 1 time 0.749994E+02 x -0.4632427E+01y -0.4993145E+01 z 0.1174878E+02

slave 1 time 0.799993E+02 x 0.4256283E+01y 0.4991268E+01 z -0.1151646E+02

master 1 time 0.799993E+02 x -0.4256267E+01y -0.4991168E+01 z 0.1151717E+02

slave 1 time 0.849992E+02 x 0.4339257E+01y 0.4934968E+01 z -0.1134986E+02

master 1 time 0.849992E+02 x -0.4339331E+01y -0.4934912E+01 z 0.1135010E+02

slave 1 time 0.899994E+02 x 0.4409178E+01y 0.4877713E+01 z -0.1132312E+02

master 1 time 0.899994E+02 x -0.4409356E+01y -0.4877520E+01 z 0.1132352E+02

slave 1 time 0.949998E+02 x 0.4545927E+01y 0.4914479E+01 z -0.1106569E+02

master 1 time 0.949998E+02 x -0.4546003E+01y -0.4914690E+01 z 0.1106606E+02

slave 1 time 0.999994E+02 x 0.4518915E+01y 0.4939886E+01 z -0.1103416E+02

master 1 time 0.999994E+02 x -0.4518810E+01y -0.4939871E+01 z 0.1103445E+02

EXEMPLO: Embutimento Com Atrito

slave 1 time 0.000000E+00 x 0.00000000E+00y 0.00000000E+00 z 0.00000000E+00

master 1 time 0.000000E+00 x 0.00000000E+00y 0.00000000E+00 z 0.00000000E+00

slave 1 time 0.499955E+01 x 0.1850333E-01y 0.1819617E-01 z -0.1772234E+00

master 1 time 0.499955E+01 x -0.1850346E-01y -0.1819613E-01 z 0.1772232E+00

slave 1 time 0.999982E+01 x 0.1827893E-01y 0.2011593E-01 z -0.5848458E+00

master 1 time 0.999982E+01 x -0.1827896E-01y -0.2011600E-01 z 0.5848464E+00

slave 1 time 0.149999E+02 x 0.1481392E-01y 0.1696009E-01 z -0.1357868E+01

master 1 time 0.149999E+02 x -0.1481397E-01y -0.1696021E-01 z 0.1357890E+01

slave 1 time 0.199993E+02 x 0.4070872E-01y 0.4001686E-01 z -0.2464985E+01

master 1 time 0.199993E+02 x -0.4070916E-01y -0.4001699E-01 z 0.2465063E+01

slave 1 time 0.249997E+02 x 0.3040441E+00y 0.3049566E+00 z -0.4478608E+01

master 1 time 0.249997E+02 x -0.3040440E+00y -0.3049558E+00 z 0.4478661E+01

slave 1 time 0.299995E+02 x 0.9357271E+00y 0.9458628E+00 z -0.7246601E+01

master 1 time 0.299995E+02 x -0.9357367E+00y -0.9458747E+00 z 0.7246839E+01

slave 1 time 0.349996E+02 x 0.1770387E+01y 0.1793951E+01 z -0.9174151E+01

master 1 time 0.349996E+02 x -0.1770420E+01y -0.1794010E+01 z 0.9174042E+01

slave 1 time 0.399996E+02 x 0.2792986E+01y 0.2819810E+01 z -0.1149744E+02

master 1 time 0.399996E+02 x -0.2792926E+01y -0.2819703E+01 z 0.1149779E+02

slave 1 time 0.449994E+02 x 0.3438649E+01y 0.3468508E+01 z -0.1283354E+02

master 1 time 0.449994E+02 x -0.3438629E+01y -0.3468484E+01 z 0.1283345E+02

slave 1 time 0.499998E+02 x 0.3885333E+01y 0.3785197E+01 z -0.1414069E+02

master 1 time 0.499998E+02 x -0.3885334E+01y -0.3785139E+01 z 0.1414080E+02

slave 1 time 0.549994E+02 x 0.4214530E+01y 0.4295298E+01 z -0.1453194E+02

master 1 time 0.549994E+02 x -0.4214425E+01y -0.4295193E+01 z 0.1453236E+02

slave 1 time 0.599998E+02 x 0.4542869E+01y 0.4445528E+01 z -0.1484083E+02

master 1 time 0.599998E+02 x -0.4542917E+01y -0.4445515E+01 z 0.1484087E+02

slave 1 time 0.649992E+02 x 0.4966761E+01y 0.5023775E+01 z -0.1479341E+02

master 1 time 0.649992E+02 x -0.4966681E+01y -0.5023731E+01 z 0.1479414E+02

slave 1 time 0.699996E+02 x 0.4992092E+01y 0.5351439E+01 z -0.1562371E+02

master 1 time 0.699996E+02 x -0.4992221E+01y -0.5351185E+01 z 0.1562382E+02

slave 1 time 0.749994E+02 x 0.4986887E+01y 0.5369808E+01 z -0.1538342E+02

master 1 time 0.749994E+02 x -0.4986928E+01y -0.5369783E+01 z 0.1538459E+02

slave 1 time 0.799992E+02 x 0.5276931E+01y 0.5674765E+01 z -0.1536672E+02

master 1 time 0.799992E+02 x -0.5276791E+01y -0.5674722E+01 z 0.1536633E+02

slave 1 time 0.849995E+02 x 0.5424528E+01y 0.5807689E+01 z -0.1529194E+02

master 1 time 0.849995E+02 x -0.5424550E+01y -0.5807682E+01 z 0.1529075E+02

slave 1 time 0.899992E+02 x 0.5031398E+01y 0.5863895E+01 z -0.1545498E+02

master 1 time 0.899992E+02 x -0.5031503E+01y -0.5864069E+01 z 0.1545477E+02

slave 1 time 0.950000E+02 x 0.5018244E+01y 0.5876001E+01 z -0.1499094E+02

master 1 time 0.950000E+02 x -0.5018091E+01y -0.5876178E+01 z 0.1499057E+02

slave 1 time 0.999996E+02 x 0.5058015E+01y 0.5891272E+01 z -0.1495814E+02

master 1 time 0.999996E+02 x -0.5058304E+01y -0.5891544E+01 z 0.1495691E+02